Prof. Vinicius Soares

A Matemática do Ensino Fundamental

Apostila do 8º Ano

Primeiro Semestre

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

S237m Santos, Vinícius Soares dos.
A Matemática do Ensino Fundamental: 8º Ano / Vinícius Soares dos Santos. – Goiânia, GO: Ed. do Autor, 2024.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-5872-798-9

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Título.
CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

AMOSTRA

Este material ou qualquer parte dele, incluindo suas ilustrações, não pode ser reproduzido ou usado de forma alguma sem autorização expressa do autor, estando resguardado sob a legislação dos direitos autorais.

Conteúdo

1º semestre

Módulo 01 – Porcentagem e juros
1. Definição de porcentagem (revisão)
2. Porcentagem e problemas
3. Porcentagem e aumentos
4. Porcentagem e descontos
5. Aumentos sucessivos
6. Descontos sucessivos
7. Juros simples
8. Noção intuitiva de juros compostos

Módulo 02 – Potenciação
1. Propriedades da potenciação (revisão)
2. Potências com expoente negativo

Módulo 03 – Os números reais
1. Raiz quadrada exata e quadrados perfeitos
2. Raiz quadrada aproximada
3. Números racionais
4. Números irracionais
5. Números reais

Módulo 04 – Introdução ao cálculo algébrico
1. Variável
2. Expressões algébricas
3. Valor numérico de uma expressão algébrica

Módulo 05 – Polinômios
1. Monômios
2. Monômios e operações
3. Polinômios
4. Polinômios de uma só variável
5. Valor numérico de um polinômio
6. Operações com polinômios
7. Produtos notáveis
8. Fatoração de polinômios

Módulo 06 – Frações algébricas

1. Frações algébricas
2. MMC de polinômios
3. Simplificando frações algébricas

- ✅ Revisões semanais;
- ✅ Exercícios complementares;
- ✅ Exercícios de vestibulares, concusos e olimpíadas;
- ✅ Avaliação por módulo;
- ✅ Orientações e gabarito.

AMOSTRA

Módulo 01

Aula 01 – Definição de porcentagem

Aquecimento

Resolva, mentalmente, a equação do 1° grau:

$$3x + 5 = x + 11$$

Um pouco de história

A porcentagem é uma medida muito comum que utilizamos em muitas situações da vida cotidiana, desde fazer compras ou investirmos nosso dinheiro até compreender dados estatísticos. Mas você já se perguntou de onde vem esse conceito e como ele se desenvolveu ao longo do tempo?

A história da porcentagem remonta à antiga civilização egípcia, onde os escribas usavam um sistema de frações baseado em 100 para facilitar os cálculos de taxas de impostos e divisões de terras. No entanto, foi na Europa do século XV que a porcentagem começou a tomar forma mais próxima do que conhecemos hoje. Os comerciantes italianos usavam o termo "per cento", que significa "por cento", para calcular lucros e comissões em suas transações comerciais.

https://engquimicasantossp.com.br

Foi somente no século XVII, com o avanço do sistema decimal, que a porcentagem se tornou mais amplamente utilizada. Matemáticos como Simon Stevin popularizaram o conceito de dividir quantidades em partes de 100, o que facilitou os cálculos e as comparações em diversas áreas, desde finanças até ciências naturais.

Hoje, a porcentagem é uma ferramenta essencial em muitos campos, incluindo economia, estatística, matemática financeira e ciências sociais. Ela nos permite expressar proporções e comparar valores de forma rápida e intuitiva, tornando-se uma parte fundamental do nosso vocabulário matemático e do nosso dia a dia.

AMOSTRA

Direto ao assunto

Porcentagem é uma forma especial de escrevermos uma fração centesimal, ou seja, uma fração de denominador 100. Qualquer fração que seja equivalente a uma fração centesimal também pode ser escrita na forma de porcentagem.

Símbolo: %

Em uma fração centesimal, substituímos o denominador 100 pelo símbolo %. Veja:

$\frac{24}{100} = 24\%$	$\frac{19}{100} = 19\%$	$\frac{125}{100} = 125\%$

Caso a fração não tenha, inicialmente, denominador 100, podemos encontrar uma fração equivalente a ela para transformá-la em porcentagem.

$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 75\%$	$\frac{17}{20} = \frac{17 \times 5}{20 \times 5} = \frac{85}{100} = 85\%$

Caso o denominador da fração não seja um divisor de 100, podemos encontrar uma porcentagem decimal ou aproximada para representar a fração:

1° modo) Transformamos a fração para decimal e a multiplicamos por 100% para transformá-la em porcentagem.

Exemplo:

a) $\frac{3}{8} = 0{,}375$

$= 0{,}375 \times 100\ \%$

$= 37{,}5\ \%$

Rascunho

U , d c m

3 0 | 8

6 0 0, 3 7 5

4 0 U , d c m

0

AMOSTRA

2º modo) Multiplicamos a fração por 100% e a simplificamos.

Exemplos:

a) $\frac{3}{8} \qquad = \frac{3}{8} \times 100\ \%$

Para facilitar os cálculos, colocaremos o símbolo de porcentagem apenas no final.

$$= \frac{3}{8} \times \frac{100}{1}$$

$$= \frac{300}{8}$$

$$= \frac{300 \div 4}{8 \div 4}$$

$$= \frac{75}{2} = 37{,}5\ \%$$

Rascunho

DU,d

$$\begin{array}{r|l} 75 & 2 \\ \hline 15 & 37{,}5 \\ 10 & \text{DU,d} \\ 0 & \end{array}$$

b) $\frac{5}{11} \qquad = \frac{5}{11} \times 100\ \%$

$$= \frac{5}{11} \times \frac{100}{1}$$

$$= \frac{500}{11} = 45{,}454545\ \ldots$$

$$\cong 45{,}5\%$$

Dica: revisar aproximação de números decimais.

Rascunho

C D U, d c m ...

$$\begin{array}{r|l} 500 & 11 \\ \hline 60 & 45{,}454\ \ldots \\ 50 & \text{DU,dcm}\ \ldots \\ 60 & \\ 50 & \\ 60 & \\ \ldots & \end{array}$$

Reflexão

Por que podemos multiplicar uma fração ou um número decimal por 100%?

AMOSTRA

Observações:

1) 0% = 0/100 = 0
2) 100% = 100/100 = 1
3) Existem porcentagem maiores que 100%.

Exercícios resolvidos

01. "Em uma escola, 24% dos alunos têm olhos claros. Logo, na média, a cada 25 alunos dessa escola, 19 não têm olhos claros."

A afirmação acima é verdadeira ou falsa? Justifique.

Solução:

Se 24% dos alunos têm olhos claros, então 100% − 24% = 76% não têm olhos claros. Se a cada 25 alunos dessa escola, 19 têm olhos claros, então:

$$\frac{19}{25} = \frac{19 \times 4}{25 \times 4} = \frac{76}{100} = 76\%$$

Portanto, a afirmação é verdadeira.

02. Em uma cesta, há 12 bombons de chocolate e 6 bombons de morango. Se acrescentarmos mais 2 bombons de morango nessa cesta, qual será a porcentagem de bombons de morango?

Solução:

Após acrescentarmos 2 bombons de morango na cesta, teremos 8 bombons de morango em um total de 20.

$$\frac{8}{20} = \frac{8 \times 5}{20 \times 5} = \frac{40}{100} = 40\%$$

Resposta: A porcentagem de bombons de morango na cesta após acrescentarmos mais 2 bombons é igual a 40%.

AMOSTRA

Exercícios de fixação

01. O que é porcentagem?

____

____

02. Transforme para porcentagem:

a) $\frac{3}{5} =$	b) $\frac{7}{25} =$
c) $\frac{5}{8} =$	d) $\frac{2}{3} =$
e) $0{,}65 =$	f) $0{,}336 =$

03. O que significa dizer, por exemplo, que João gastou 45% de seu salário em um determinado mês?

____

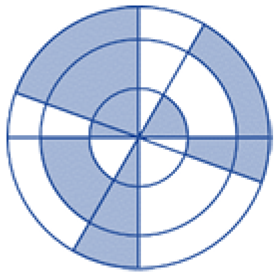
____

AMOSTRA

04. (Canguru de Matemática/2023) João tem 150 moedas. Ao jogar essas moedas sobre uma mesa, ele observa que 40% delas mostram cara e 60% mostram coroa. Quantas moedas mostrando coroa ele deve virar, de forma que o número de caras fique igual ao número de coroas?

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

05. (Canguru de Matemática/2021) A figura mostra 3 círculos concêntricos com 4 linhas retas passando pelo centro comum. Qual porcentagem da figura está sombreada?



(A) 30% (B) 35% (C) 40% (D) 45 (E) 50%

AMOSTRA

06. (IFGO/2014) Um técnico em química, realizando um experimento, colocou, em um primeiro recipiente, 20 ml de uma mistura de água com 15% de álcool. Em um segundo recipiente, colocou 30 ml de uma mistura de água com 20% de álcool. Em seguida, junto as duas misturas em um terceiro recipiente.

De acordo com os procedimentos adotados no experimento, é correto afirmar que a porcentagem de álcool presente na mistura do terceiro recipiente é:

(A) 35% (B) 9% (C) 15% (D) 20% (E) 18%

AMOSTRA

07. Liste os quadrados perfeitos de 1 a 400.

$1^2 =$	$2^2 =$	$3^2 =$	$4^2 =$
$5^2 =$	$6^2 =$	$7^2 =$	$8^2 =$
$9^2 =$	$10^2 =$	$11^2 =$	$9^2 =$
$13^2 =$	$14^2 =$	$15^2 =$	$16^2 =$
$17^2 =$	$18^2 =$	$19^2 =$	$20^2 =$

08. Liste os cubos perfeitos de 1 a 1000.

$1^3 =$	$2^3 =$	$3^3 =$	$4^3 =$	$5^3 =$
$6^3 =$	$7^3 =$	$8^3 =$	$9^3 =$	$100^3 =$

Exercícios complementares

01. O que é porcentagem?

____

____

02. Transforme para fração irredutível:

a) $14\% =$	b) $26\% =$
c) $36\% =$	d) $55\% =$

AMOSTRA

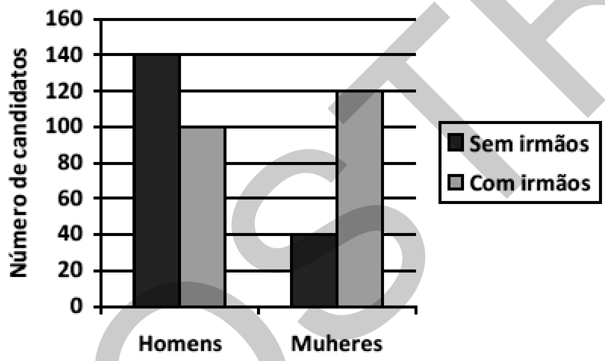
03. Suponha a manchete: "Estudo revela que mais de 70% das pessoas preferem trabalhar remotamente". Podemos afirmar que, se o número de entrevistados foi igual a 80, mais de 40 preferem trabalhar remotamente? Justifique.

____

____

04. Márcio acertou 33 cobranças de um total de 40 em um treinamento de pênaltis. Qual a porcentagem de acertos Márcio obteve nesse treinamento?

05. (IFSP/2016) O gráfico apresenta informações referentes aos candidatos que se inscreveram para fazer uma prova. Na ficha de inscrição os candidatos informaram se tinham ou não irmãos.



Com base nas informações do gráfico, é correto afirmar que, do total de candidatos, a porcentagem dos que tinham irmãos correspondia a:

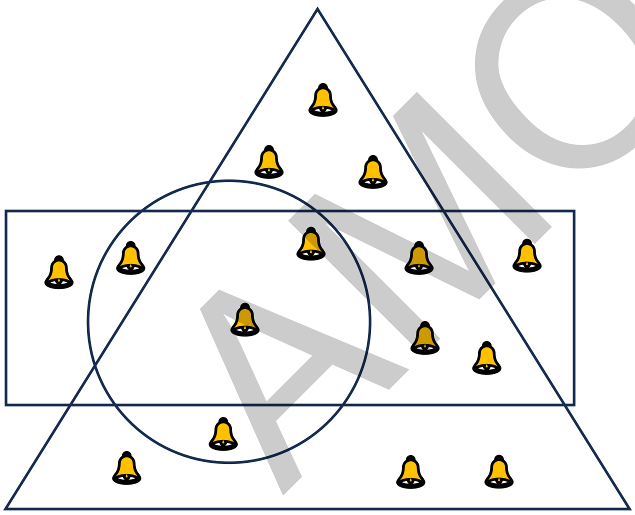
(A) 45% (B) 22% (C) 32% (D) 55% (E) 60%

AMOSTRA

06. ϟ (OBMEP/2015) Pedrinho colocou 1 copo de suco em uma jarra e, em seguida, acrescentou 4 copos de água. Depois decidiu acrescentar mais água até dobrar o volume que havia na jarra. Ao final, qual é o percentual de suco na jarra?

(A) 5% (B) 10% (C) 15% (D) 20% (E) 25%

07. ϟ Qual a porcentagem de sinos que se encontram dentro do triângulo e do retângulo, mas fora do círculo?



Cálculo

08. O que é um número primo? Dê cinco exemplos.

Aquecimento

Resolva, mentalmente, as expressões com números inteiros:

a) $-5-3\cdot(-2) =$ __________

b) $-5-3\cdot(+2) =$ __________

Direto ao assunto

A base de resolução de problemas envolvendo porcentagem é saber calcular a porcentagem de um todo (ou porcentagem de um inteiro). Obviamente o desenvolvimento de uma boa linguagem e o entendimento da gramática também são imprescindíveis. Mas se não soubermos identificar qual é o todo de referência, poderemos cometer equívocos.

Há várias formas de calcularmos uma porcentagem de um todo. No entanto, sendo X% a porcentagem de um todo T a ser calculada, a mais indicada é:

$$\text{X\% de T} = \frac{\text{X}}{100}\cdot \text{T}$$

Ou seja:

1) Transformamos a porcentagem para fração;
2) Multiplicamos pelo todo.

Para finalizar o cálculo, podemos realizar multiplicação de frações, inclusive utilizando-se da simplificação.

Podemos, também, ao invés de transformar a porcentagem para fração, transformá-la em número decimal e multiplicá-la pelo todo ou até mesmo utilizar a regra de três simples.

Dica: revisar grandezas direta e inversamente proporcionais e regra de três simples.

AMOSTRA

Exercícios resolvidos

01. Calcule 12% de 350.

Solução:

$$12\% \text{ de } 350 = \frac{12}{100}\cdot 350 = \frac{12}{10\cancel{0}}\cdot 35\cancel{0} = \frac{12}{\underset{2}{\cancel{10}}}\cdot \overset{7}{\cancel{35}} = \frac{12}{2}\cdot 7 = 6\cdot 7 = 42$$

Resposta: 12% de 350 é igual a 42.

02. Em uma livraria, há 15.000 livros. Desse total, 39% são livros usados. Quantos livros novos há nessa livraria?

Solução:

Antes da resolução do problema, lembre-se de identificar o todo. Neste caso, o todo corresponde aos 15.000 livros da livraria.

O enunciado nos informa que, do total de livros (dos 15.000), 39% são livros usados, mas pergunta quantos livros novos há na livraria.

Portanto, se há 39% de livros usados, 100% – 39% = 61% correspondem à quantidade de livros novos. Logo:

$$61\% \text{ de } 15000 = \frac{61}{1\cancel{00}}\cdot 150\cancel{00} = 61\cdot 150 = 9150$$

Resposta: Há 9150 livros novos nessa livraria.

AMOSTRA

03. Em uma sala de aula com 40 alunos, 40% do total são meninos. Sabe-se também que 25% das meninas usam óculos. Quantas meninas desta sala não usam óculos?

Solução:

Neste exercício, perceba que temos dois “todos” distintos de referência:

40% do “total”

25% das “meninas”

Vamos, portanto, organizar nossa solução em dois passos.

1) Cálculo do total de meninas.

Se 40% do total de alunos são meninos, 60% são meninas.

$60\% \text{ de } 40 = 0{,}6 \cdot 40 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ meninas.}$

2) Cálculo das meninas que não usam óculos.

Se 25% das meninas usam óculos, 75% não usam.

$$75\% \text{ de } 24 = \frac{\overset{3}{\cancel{75}}}{\underset{4}{\cancel{100}}} \cdot \overset{6}{\cancel{24}} = 18 \text{ meninas.}$$

Resposta: Dezoito meninas desta sala não usam óculos.

04. Sabe-se que 34% de um valor é igual a 204. Qual é esse valor?

Solução:

Neste exercício, o todo é exatamente o que precisamos calcular. Utilizaremos o auxílio da regra de três simples, uma vez que quantidade e porcentagem são **grandezas diretamente proporcionais**.

AMOSTRA

Seja “x” o valor procurado. Temos:

Diretamente proporcionais

Porcentagem	DP	Valor
34%		204
100%		x

$$\frac{34}{100} = \frac{204}{x} \Rightarrow 34x = 100 \cdot 204 \Rightarrow x = \frac{100 \cdot \overset{6}{\cancel{204}}}{\cancel{34}} \Rightarrow x = 600$$

Resposta: Esse valor é igual a 600.

AMOSTRA

Exercícios de fixação

01. Como podemos calcular a porcentagem de um todo?

____

____

____

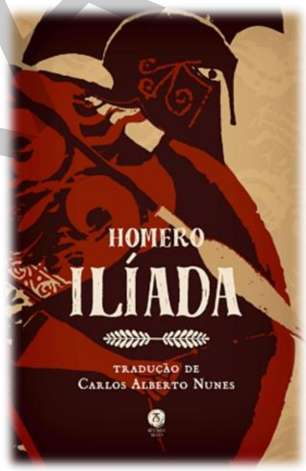
____

02. Calcule 12% de:

a) 500	b) 480	c) 288

03. Sabe-se que 15% de um valor é igual a 27. Qual é esse valor?

04. “Obra-prima do gênero épico, a Ilíada representa o nascimento e o momento fundador de toda a tradição literária do Ocidente. Composta de material heterogêneo e da mais variada procedência, podemos observar na Ilíada o gênio literário de Homero, o maior dos poetas, em todo seu vigor criativo de linhas sóbrias e de equilíbrio perfeito.



A narração dos cinquenta dias do nono ano da guerra de Troia conduz o leitor pela inicial ira de Aquiles, herói invencível e líder do exército aqueu, contra Agamémnone, culpado de ter sequestrado a formosa Briseide, até o desfecho no funeral de Heitor, o guerreiro troiano demasiado humano que viu seus homens derrotados pela astúcia de Odisseu. É nessa multiplicidade de episódios que surgem as figuras de Aquiles, Páris, Helena, Heitor, Menelau, Odisseu, Agamémnone e tantos outros.”

https://livrariaguilhermefreire.com.br/iliada-setimo-selo

A edição ilustrada na imagem contém 544 páginas. João afirma que leu, em 6 dias, 75% do livro. Podemos afirmar, portanto, que João leu, em média, nesses seis dias:

a) 54 páginas por dia.
b) 68 páginas por dia.
c) 64 páginas por dia.
d) 60 páginas por dia.
e) 58 páginas por dia.

AMOSTRA

05. Uma pessoa com 110 kg deseja perder 15% de sua massa corporal. Quantos quilogramas essa pessoa precisará perder para cumprir seu objetivo?

06. (Instituto Avança São Paulo/2024) Em uma cidade, 25% da população possui carros. Se a população total é de 120.000 habitantes, quantas pessoas têm carros?

a) 20.000 b) 25.000 c) 30.000 d) 15.000 e) 10.000

07. (FAUEL/2024) Dos 320 candidatos inscritos para um processo seletivo, 25% passarão para a segunda fase. Quantos candidatos passarão para a segunda fase nesse processo seletivo?

a) 80 candidatos b) 100 candidatos c) 160 candidatos d) 250 candidatos

AMOSTRA

08. Complete corretamente:

a) Calcular 1% de um todo é o mesmo que dividir esse todo pelo número inteiro __________.

b) Calcular 5% de um todo é o mesmo que dividir esse todo pelo número inteiro __________.

c) Calcular 10% de um todo é o mesmo que dividir esse todo pelo número inteiro __________.

d) Calcular 20% de um todo é o mesmo que dividir esse todo pelo número inteiro __________.

e) Calcular 25% de um todo é o mesmo que dividir esse todo pelo número inteiro __________.

f) Calcular 50% de um todo é o mesmo que dividir esse todo pelo número inteiro __________.

g) Calcular 27% de 50 é o mesmo que calcular 50% de __________.

09. Em uma sala com 150 alunos, 60% são meninas. Sabe-se que 70% dos meninos gostam de futebol. Quantos meninos desta sala não gostam de futebol?

“Et cognoscetis veritatem et veritas liberabit vos”

AMOSTRA

Exercícios complementares

01. O que é porcentagem?

____

____

02. Como podemos calcular a porcentagem de um todo?

____

____

____

____

03. Calcule 35% de 90, transformando a porcentagem para:

a) fração	b) decimal

04. Calcule mentalmente:

a) 25% de 44 = __________

b) 20% de 45 = __________

c) 14% de 50 = __________

d) 10% de 78 = __________

AMOSTRA

05. (Instituto Avança São Paulo/2024) Ana gastou 40% de seu salário em despesas pessoais, totalizando R$ 600. Qual é o valor do salário mensal de Ana?

a) R$ 1.200,00 b) R$ 1.300,00 c) R$ 1.400,00 d) 1.500,00 e) N.D.A

06. (Objetiva Concursos/2024) A quantidade total de veículos que utilizaram um estacionamento em certo dia é igual a 380. Sabe-se também que 65% desses veículos eram carros e o restante eram motos.

Sendo assim, qual o total de motos que utilizou esse estacionamento nesse dia?

a) 133 b) 137 c) 141 d) 145

07. (IBFC/2024) Um agricultor plantou uma área retangular de terra com laranjeiras. Ele plantou 8 fileiras de laranjeiras, e em cada fileira, ele plantou 15 laranjeiras espaçadas igualmente. No entanto, devido a uma praga, 15% das laranjeiras morreram. O número de laranjeiras que ainda restaram é de:

a) 100 b) 102 c) 138 d) 95 e) 98

AMOSTRA

08. ⚡ (FUNDATEC/2024) Raul está fazendo uma lista de exercícios de Matemática. No primeiro dia, ele fez 40% das atividades, no segundo dia, 25% dos exercícios que sobraram. Que porcentagem da lista Raul ainda precisa fazer?

a) 15% b) 25% c) 35% d) 45% e) 55%

09. (OBMEP 2022) Os números x e y são tais que 80% de x é igual a 20% de y. Qual das igualdades abaixo é verdadeira?

a) $x = 4y$ b) $2x = 3y$ c) $x = 8y$ d) $3x = 2y$ e) $4x = y$

10. ⚡ (OBMEP 2022) Um fabricante diminuiu a quantidade de chocolate em uma caixa de 250g para 200g, mantendo o preço da caixa. Qual foi o aumento percentual do preço do grama do chocolate?

a) 5% b) 10% c) 15% d) 20% e) 25%

AMOSTRA

Aquecimento

Responda com cálculo mental:

01. Dois aumentos sucessivos de 10% cada são equivalentes a um único aumento de quantos por cento?

02. Dois descontos sucessivos de 10% cada são equivalentes a um único desconto de quantos por cento?

AMOSTRA

Um pouco de história

A palavra *juro*, tão presente no mundo moderno, significa "preço do aluguel de um capital ou valor". No entanto, essa palavra provém do advérbio latino *jure*, que significa "de direito". Mas, afinal, o que tem a ver uma coisa com a outra? Um pouco da história da matemática comercial ajuda a esclarecer essa relação.

A cobrança de juro é uma prática muito antiga na história da humanidade, anterior à invenção da moeda, quando os valores eram representados por metais preciosos ou outros produtos. Na Suméria, por exemplo, cerca de 2000 anos antes de Cristo, a taxa de juro podia variar de 20% a 30%, dependendo da forma de pagamento: em metais preciosos ou em produtos. Mais tarde, entre os babilônios, a taxa variava de 5,5% a 20% para pagamento em metais preciosos e de 20% a 33,5% para pagamento em produtos. É bom frisar, porém, que as taxas de juros não eram expressas em porcentagens, como hoje.

Na Grécia, oscilavam entre 12% e 18%, sendo os juros pagos mensalmente. No tempo de Demóstenes (384-322 a.C.), por exemplo, uma taxa de 12% era considerada baixa.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Demóstens

Na Roma antiga, inicialmente, não havia nenhuma limitação à taxa de juros cobrada. Mas a Lei das Doze Tábuas (c. 445 a.C.) limitou-a a $8\frac{1}{3}\%$ do capital, para cidadãos romanos. Somente no ano 100 a.C. essa taxa foi estendida aos estrangeiros. No período final do Império Romano foi adotada a prática de juros mensais. Inicialmente a taxa era de 1%, mas o imperador Justiniano (482-565 d.C.) fixou-a em 0,5% ao mês, derivando daí a taxa de 6% ao ano.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Justiniano

Na Idade Média, havia distinção entre empréstimo para a produção – para o qual era admitida uma certa remuneração – e empréstimo para o consumo – sobre o qual o juro era considerado, pela Igreja, contrário ao interesse público. Devido a essa restrição, o Direito Romano estabeleceu uma regra interessante para a remuneração de empréstimos: o devedor não pagava juro se quitasse o empréstimo em dia; mas, se atrasasse, tinha de compensar o credor com *aquilo que está entre* (em latim, *id quod interest*) o que ele teria – se o principal lhe tivesse sido devolvido na data do vencimento do empréstimo – e o que efetivamente tinha nessa data. É provável que, no século XIII, essa regra tenha sido disciplinada com a fixação de uma certa porcentagem acordada preliminarmente. É dessa expressão latina que derivam as palavras *interés* (espanhol), *intérêt* (francês) e *interest* (inglês), que significam *juro*.

Durante a Renascença, a cobrança de juro continuou oscilando entre a proibição e a necessidade de regulamentação legal. Na Alemanha, a oposição à cobrança de juros era grande. Na Inglaterra, em 1545, o Parlamento aprovou uma lei fixando em 10% o limite máximo da taxa de juro. Os protestos foram tantos que a lei foi revogada, sendo, porém, reeditada em 1571. No entanto, foi na Renascença, com o desenvolvimento do comércio, que o juro passou a ser visto como um prêmio pelo risco envolvido no uso que o tomador faria do empréstimo e como um direito.

E quando o sinal de porcentagem (%) passou a ser adotado? Em algumas aritméticas especializadas do século XV encontram-se, por exemplo, expressões como “X p 100”, para indicar 10%. O *p* que aparece nessa expressão é a primeira letra de *per* (“por”). Encontram-se também as seguintes formas de *per cento*: *per c*^{o} e *p c*^{o}, autoexplicativas. No início do século XVII, essas formas transformaram-se em *per* $\frac{o}{o}$. Mais tarde, o *per* foi abandonado, restando apenas $\frac{o}{o}$. Esse símbolo é o antepassado mais próximo do símbolo atual: %.

(Iezzi, Dolce & Machado, 2013, pp. 259-260, adaptado)

AMOSTRA

Adquira nossos cursos e materiais: https://loja.profviniciusmat.com.br

Direto ao assunto

Além das definições dadas no texto da seção "Um pouco de história", de acordo com o Glossário Simplificado de Termos Financeiros, do Banco Central do Brasil, juros pode ser definido como sendo "o custo que se tem para 'deslocar' o dinheiro no tempo". Em outras palavras, é o valor que temos que pagar a mais por ter tomado uma quantia emprestada para antecipar uma compra ou o valor que temos o direito de receber a mais por termos emprestado uma quantia a outro.

Juros é o valor a pago a mais pela aquisição de um empréstimo ou o valor recebido a mais por ter emprestado uma quantia.

Suponha que o senhor Joaquim fez um empréstimo de R$ 5.000 e o pagou em 12 prestações de R$ 440,00. Quantos reais de juros o senhor Joaquim pagou?

Solução:

12 x 440 = R$ 5280,00

5280 – 5000 = R$ 280,00

Resposta: O senhor Joaquim pagou R$ 280,00 de juros.

AMOSTRA

Deste exemplo, podemos tirar alguns conceitos importantes:

- O valor tomado emprestado inicialmente (R$ 5000) é chamado de capital inicial e será representado por C.
- O tempo durante o qual o dinheiro esteve emprestado (12 meses) é chamado de período e será representado por t.
- Os juros serão representados por J.
- E o total pago, capital inicial mais os juros gerados no período (R$ 5280) é chamado de Montante (Capital Final) e será representado por M.

Neste exato momento, em uma aula ao vivo, você poderia me perguntar: “Como foi calculada a quantia de juros a ser paga”?

Eu ficaria extremamente alegre com a pergunta e lhe responderia: “Essa quantia é calculada através de uma taxa de juros. Essa é a nossa última variável.”

- Os juros de um empréstimo ou investimento são calculados tomando-se por base uma taxa de juros por período pré-acordada entre as partes envolvidas. Será representada pela letra i.

Dica: Memorize as variáveis.

- Capital inicial: C
- Taxa: i
- Período: t
- Juros: J
- Montante: M

Outra pergunta que você poderia me fazer nesse momento: “Professor, qual foi a porcentagem de juros utilizada no exemplo anterior?”.

Novamente, com muita alegria, lhe responderia: “Excelente pergunta. Mas a resposta é: depende! Depende, principalmente, do tipo de juros que foi acordado entre as partes e do período de aplicação dos juros, como mensal ou anual.”

Os principais tipos de juros que temos são os juros simples e os juros compostos. Nesta aula estudaremos sobre os juros simples.

Para o cálculo de juros na modalidade simples,
a taxa é sempre aplicada ao capital inicial.

Como, então, poderemos calcular juros na modalidade simples? E como os juros nessa modalidade irão se comportar? Que características terão? Reflita um pouco sobre possíveis respostas a essas perguntas e confira na próxima página.

AMOSTRA

Cálculo dos juros simples

Para calcular juros simples, vamos imaginar a seguinte situação:

Suzana investiu R$ 5.000 à taxa de juros simples de 0,8% ao mês, durante 10 meses.

a) Quantos reais de juros, nesse período, rendeu o investimento de Suzana?

Solução:

Nos juros simples, a taxa é sempre aplicada no capital inicial. Então, no 1° mês, temos:

$$0{,}8\% \text{ de R\$ } 5000 = \frac{0{,}8}{1\cancel{00}} \cdot 50\cancel{00} = 0{,}8 \cdot 50 = 8 \cdot 5 = \text{R\$ } 40{,}00$$

No primeiro mês tivemos um rendimento de R$ 40,00 de juros. Mas como a taxa de 0,8% sempre será aplicada no capital inicial, logo, cada um dos 10 meses da aplicação renderá R$ 40,00 de juros, ou seja, os juros são constantes. Então, para saber o total de juros gerados nesse período, basta multiplicarmos os juros gerados em um mês pelo total de meses em que o capital inicial permanecerá aplicado.

$$\text{R\$ } 40 \times 10 = \text{R\$ } 400{,}00$$

Portanto, o investimento de Suzana rendeu R$ 400 de juros em 10 meses.

b) Qual o montante resgatado por Suzana após esse período?

Solução:

Como Suzana aplicou R$ 5000 e obteve R$ 400 de rendimento, após os 10 meses Suzana resgatou:

$$\text{R\$ } 5000{,}00 + \text{R\$ } 400{,}00 = \text{R\$ } 5400{,}00$$

Portanto, Suzana resgatou R$ 5400,00 de montante após os 10 meses.

AMOSTRA

Repare bem que, para chegarmos nos R$ 400 de juros:

1) Multiplicamos o capital inicial pela taxa.

- Numericamente: $5000 \cdot \dfrac{0{,}8}{100}$

- Algebricamente: $C \cdot i$

2) Multiplicamos o resultado da multiplicação acima pelo período.

- Numericamente: $5000 \cdot \dfrac{0{,}8}{100} \cdot 10$

- Algebricamente: $C \cdot i \cdot t$

Portanto, para determinar os juros simples (J) sobre um capital inicial (C), considerando uma taxa (i) e um período (t), podemos usar a seguinte equação:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Como o montante (M) é a soma entre o capital inicial e os juros, para calculá-lo podemos usar a seguinte equação:

$$M = C + J$$

Para calcular o montante direto, sem passar pelo cálculo dos juros, podemos substituir os juros (J) por ($C \cdot i \cdot t$) e a nossa equação ficará assim:

$$M = C + C \cdot i \cdot t \qquad \underline{\text{OU}} \qquad M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Vale relembrar que entender as fórmulas é mais importante do que memorizá-las e utilizá-las. Vejamos nos exercícios resolvidos alguns exemplos de aplicação.

AMOSTRA

Exercícios resolvidos

01. Calcule os juros de uma aplicação de R$ 2600,00, com taxa de 0,85% ao mês, durante 11 meses, no regime de capitalização simples.

Solução:

Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$. Extraindo os dados do enunciado:

$C =$ R$ 2600; $i = 0{,}85\%$ a.m $t = 11$ meses

$$J = 26\cancel{00} \cdot \frac{0{,}85}{1\cancel{00}} \cdot 11 = 26 \cdot 0{,}85 \cdot 11 = 22{,}1 \cdot 11 = \text{R\$ } 243{,}10$$

Resposta: R$ 243,10.

02. Pedro emprestou R$ 2500,00 a seu amigo, João. O acordo estabelece uma taxa de juros simples de 2% ao mês. Quanto João terá que devolver a Pedro após 6 meses?

Solução:

Como João terá que devolver a Pedro tanto o que pegou emprestado quanto os juros gerados no período, o valor que ele será remover a Pedro é o montante.

$C =$ R$ 2500; $i = 2\%$ a.m $t = 6$ meses

Sendo que $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$ e fazendo as substituições, temos:

$$M = 2500 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 6) = 2500 \cdot (1 + 0{,}12) = 2500 \cdot 1{,}12 = \text{R\$ } 2800$$

Resposta: João terá que devolver a Pedro, após 6 meses, R$ 2800.

AMOSTRA

Exercícios de fixação

01. O que são juros?

___

___

___

02. Qual a característica especial dos juros simples?

___

___

03. Maria emprestou R$ 500,00 a seu amigo Paulo a uma taxa de juros simples de 1% ao mês. Quanto Paulo deverá pagar de juros após 3 meses?

04. João investiu R$ 2000,00 a uma taxa de juros simples de 2,5% ao mês. Quanto ele ganhará de juros após 5 meses?

AMOSTRA

05. Ana tomou emprestado R$ 800,00 a uma taxa de juros simples de 2% ao mês. Quanto ela deverá pagar após 6 meses?

06. Carlos investiu R$ 3000,00 a uma taxa de juros simples de 1,5% ao mês. Quanto ele ganhará de juros após 4 meses?

07. Paula emprestou R$ 1200,00 a uma taxa de juros simples de 2,5% ao mês. Quanto ela receberá de volta após um ano e meio?

08. No texto da seção “Um pouco de história”, lemos que as palavras que designam o preço do aluguel de um capital ou valor têm a mesma origem nas línguas espanhola, francesa e inglesa. Mas na língua portuguesa a origem é outra. O que poderia explicar a opção feita pela língua portuguesa?

“Nolite ergo esse solliciti in crastinum; crastinus enim dies sollicitus erit sibi ipse. Sufficit diei malitia sua.” (Mt 6, 34)

AMOSTRA

Exercícios complementares

Desafios de vestibulares

(Importante: assista às orientações dadas na aula)

01. (UFC CE/2000) José emprestou R$ 500,00 a João por 5 meses, no sistema de juros simples, a uma taxa de juros fixa e mensal. Se no final dos 5 meses José recebeu um total de R$ 600,00, então a taxa fixa mensal aplicada foi de:

a) 0,2%. b) 0,4%. c) 2%. d) 4%. e) 6%.

02. (UEPG PR/2002) Uma pessoa tomou R$ 25.000,00 emprestados em um banco, por um prazo determinado, a juros simples de 6% ao mês. Sabendo-se que no vencimento ela pagou R$ 37.000,00 ao banco, quantos meses durou o empréstimo?

03. (UNIMONTES MG/2007 - Adaptado) Um comerciante aplicou um capital a 24% ao ano e o triplo desse capital a 26% ao ano. Depois de um ano, ele recebeu R$1530,00 de juros. Qual o capital total aplicado?

a) R$9000,00 b) R$4500,00 c) R$5000,00 d) R$6000,00

AMOSTRA

04. (UEG GO/2004) Aplicados 2/3 de um capital a uma taxa de 24% ao ano e o restante a 30% ao ano, ambos a juros simples, obtém-se, em 8 meses, um rendimento de R$ 130,00. O capital aplicado é de:

a) R$ 700,00. b) R$ 720,00. c) R$ 740,00. d) R$ 750,00. e) R$ 760,00.

05. (UNIMONTES MG/2014) Um investidor aplicou a quantia de R$5000,00 em um fundo de investimento que opera no regime de juros simples. Após 12 meses, esse investidor verificou que o montante era de R$6500,00. Qual é a taxa de juros desse fundo de investimento?

a) 0,025% ao mês. b) 2,5% ao mês. c) 2,4% ao mês. d) 0,24% ao mês.

06. (ESPM SP/2015) Um capital, aplicado à taxa de juros simples de 5% ao mês, vai triplicar o seu valor em:

a) 3 anos e 6 meses b) 3 anos e 8 meses c) 3 anos d) 3 anos e 2 meses e) 3 anos e 4 meses

AMOSTRA

Aquecimento

01. Transforme, com cálculo mental, as frações para porcentagem

a) $\frac{1}{4} =$	b) $\frac{3}{5} =$	c) $\frac{7}{10} =$	d) $\frac{1}{20} =$

Direto ao assunto

Você já parou para pensar no poder do tempo? Imagine uma semente recém-plantada: é pequena, aparentemente insignificante. No entanto, com o passar do tempo, ela se transforma em uma majestosa árvore, fornecendo sombra, sustento e beleza ao seu redor. Da mesma forma, os juros compostos funcionam como o solo fértil para o crescimento de um determinado investimento. Para isto, o tempo é essencial e também uma leve diferença no conceito, quando comparado com juros simples. Vejamos.

Na modalidade de juros simples, a taxa é sempre aplicada ao capital inicial.

Na modalidade de juros compostos, a taxa é sempre aplicada ao capital acumulado no período anterior.

O que será que essa sutil diferença provoca, na prática, em um investimento? Tente responder antes de conferir a resposta.

A melhor forma de responder essa pergunta, ao mesmo tempo que entendemos como os juros compostos funciona, é comparando.

Vamos considerar um investimento de R$ 5000, à taxa de 2% ao mês, nas duas modalidades de juros.

AMOSTRA

Juros simples

Nos juros simples, a taxa é sempre aplicada ao capital inicial. Logo, para o 1º mês, temos, de juros:

$$\frac{2}{100} \cdot 5000 = \text{R\$ } 100{,}00$$

Montante ao final do primeiro mês:

$$5000 + 100 = \text{R\$ } 5100$$

Nos juros simples, a taxa é sempre aplicada ao capital inicial. Logo, para o 2º mês, temos, de juros:

$$\frac{2}{100} \cdot 5000 = \text{R\$ } 100{,}00$$

Montante ao final do segundo mês:

$$5100 + 100 = \text{R\$ } 5200$$

Nos juros simples, a taxa é sempre aplicada ao capital inicial. Logo, para o 3º mês, temos, de juros:

$$\frac{2}{100} \cdot 5000 = \text{R\$ } 100{,}00$$

Montante ao final do terceiro mês:

$$5200 + 100 = \text{R\$ } 5300$$

Juros compostos

Nos juros compostos, a taxa é sempre aplicada ao capital acumulado no período anterior, nesse caso, ao capital inicial. Logo, para o 1º mês, temos, de juros:

$$\frac{2}{100} \cdot 5000 = \text{R\$ } 100{,}00$$

Montante ao final do primeiro mês:

$$5000 + 100 = \text{R\$ } 5100$$

Nos juros compostos, a taxa é sempre aplicada ao capital acumulado no período anterior, nesse caso, ao valor de R$ 5100. Logo, para o 2º mês, temos, de juros:

$$\frac{2}{100} \cdot 5100 = \text{R\$ } 102{,}00$$

Montante ao final do segundo mês:

$$5100 + 102 = \text{R\$ } 5202$$

Nos juros compostos, a taxa é sempre aplicada ao capital acumulado no período anterior, nesse caso, ao valor de R$ 5202. Logo, para o 3º mês, temos, de juros:

$$\frac{2}{100} \cdot 5202 = \text{R\$ } 104{,}04$$

Montante ao final do terceiro mês:

$$5202 + 104{,}04 = \text{R\$ } 5306{,}04$$

AMOSTRA

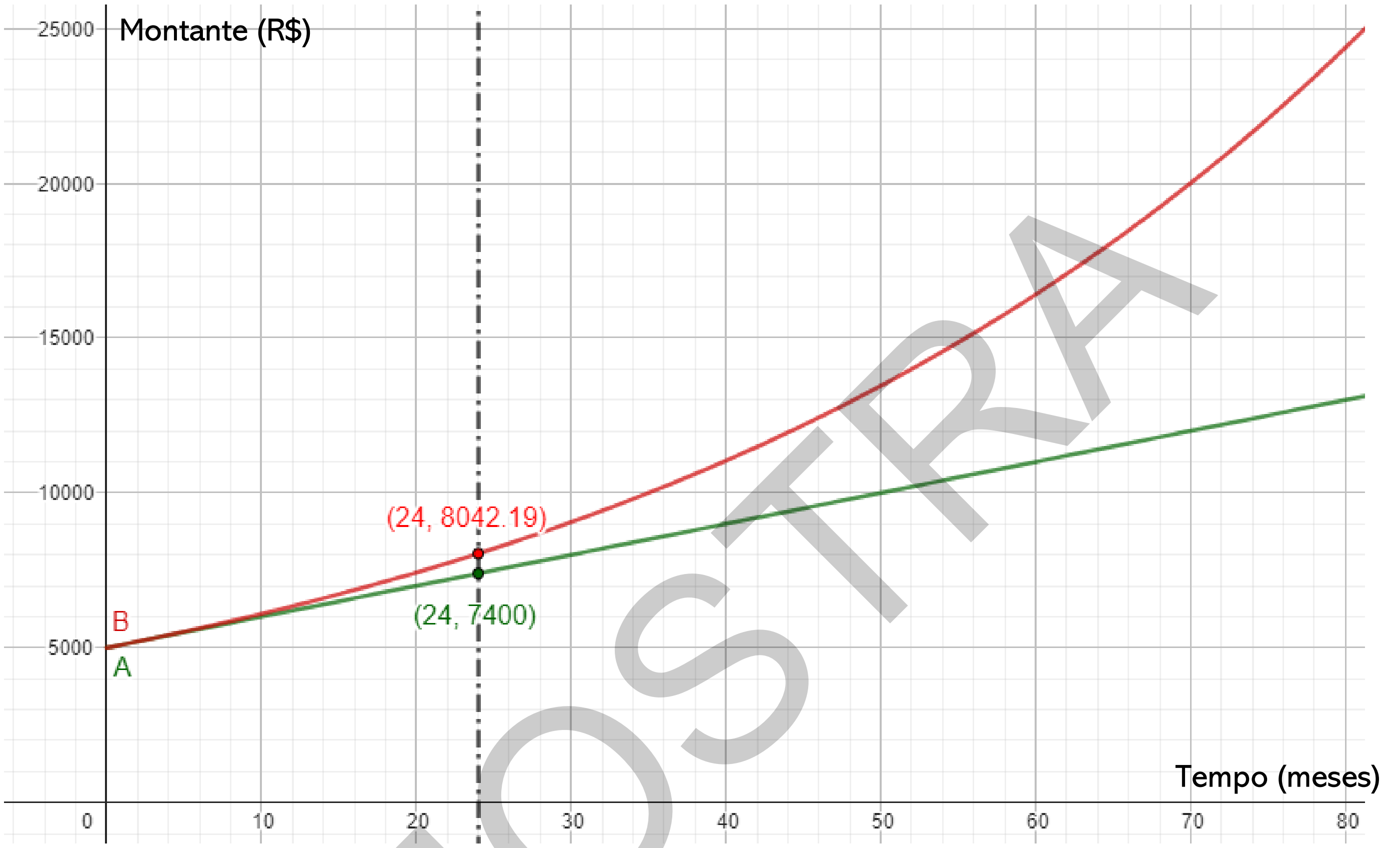
Percebam que, nos juros simples, os juros são constantes em todos os meses, pois a taxa é sempre aplicada ao capital inicial. Já nos juros compostos, os juros variam todos os meses, uma vez que a taxa é sempre aplicada ao capital acumulado no período anterior. Veja a análise do montante dessa aplicação nos 24 primeiros meses, nas duas modalidades:

Mês	Juros simples	Juros compostos	Diferença
Inicial	R$ 5.000,00	R$ 5.000,00	R$ 0,00
1	R$ 5.100,00	R$ 5.100,00	R$ 0,00
2	R$ 5.200,00	R$ 5.202,00	R$ 2,00
3	R$ 5.300,00	R$ 5.306,04	R$ 6,04
4	R$ 5.400,00	R$ 5.412,16	R$ 12,16
5	R$ 5.500,00	R$ 5.520,40	R$ 20,40
6	R$ 5.600,00	R$ 5.630,81	R$ 30,81
7	R$ 5.700,00	R$ 5.743,43	R$ 43,43
8	R$ 5.800,00	R$ 5.858,30	R$ 58,30
9	R$ 5.900,00	R$ 5.975,46	R$ 75,46
10	R$ 6.000,00	R$ 6.094,97	R$ 94,97
11	R$ 6.100,00	R$ 6.216,87	R$ 116,87
12	R$ 6.200,00	R$ 6.341,21	R$ 141,21
13	R$ 6.300,00	R$ 6.468,03	R$ 168,03
14	R$ 6.400,00	R$ 6.597,39	R$ 197,39
15	R$ 6.500,00	R$ 6.729,34	R$ 229,34
16	R$ 6.600,00	R$ 6.863,93	R$ 263,93
17	R$ 6.700,00	R$ 7.001,21	R$ 301,21
18	R$ 6.800,00	R$ 7.141,23	R$ 341,23
19	R$ 6.900,00	R$ 7.284,06	R$ 384,06
20	R$ 7.000,00	R$ 7.429,74	R$ 429,74
21	R$ 7.100,00	R$ 7.578,33	R$ 478,33
22	R$ 7.200,00	R$ 7.729,90	R$ 529,90
23	R$ 7.300,00	R$ 7.884,50	R$ 584,50
24	R$ 7.400,00	R$ 8.042,19	R$ 642,19

AMOSTRA

Percebam que, no mês 1, a diferença entre os juros compostos e os simples foi nula. Já no segundo mês, a diferença foi de R$ 2,00; no terceiro, R$ 6,04; no vigésimo quarto, a diferença já alcançava o valor de R$ 642,19. Isso é incrível! Esse é o poder do tempo.

Graficamente, temos:



A —— Juros simples B —— Juros compostos

Enquanto o gráfico do montante em juros simples é uma reta, em juros compostos é uma curva exponencial. Ao longo do tempo, a diferença entre os montantes em cada modalidade se torna bastante considerável.

O tempo é um recurso precioso e poderoso. Assim como uma correnteza suave que esculpe grandes montanhas ao longo dos anos, os juros compostos podem moldar o destino financeiro de uma pessoa ao longo de décadas. Que tenhamos sabedoria para lidar com os dons que Deus nos fornece, cultivando uma mentalidade de paciência e gratidão.

AMOSTRA

Exercícios resolvidos

01. (Instituto Verbena/2024 - Adaptada) Considere os dois investimentos a seguir:

I) Um capital de R$ 1000 foi aplicado a juros compostos, com taxa de 7% ao ano, durante 3 anos.
II) Um capital de R$ 2000 foi aplicado a juros compostos, com taxa de 5% ao ano, durante 2 anos.

Qual é a diferença aproximada entre os juros gerados pela aplicação I e a aplicação II?

a) R$ 0,00 b) R$ 12,00 c) R$ 18,00 d) R$ 20,00

Solução: Vamos calcular os juros gerados pela aplicação I.

C = R$ 1000 i = 7% a.a. t = 3 anos

$$1^{\underline{o}} \text{ ano}: \frac{7}{100} \cdot 1000 = \text{R\$ } 70$$

$$\text{M} = \text{R\$ } 1070$$

$$2^{\underline{o}} \text{ ano}: \frac{7}{100} \cdot 1070 = \text{R\$ } 74{,}90$$

$$\text{M} = \text{R\$ } 1144{,}90$$

$$3^{\underline{o}} \text{ ano}: \frac{7}{100} \cdot 1144{,}9 = \text{R\$ } 80{,}143$$

$$\text{M} \cong \text{R\$ } 1225{,}04$$

Agora, vamos calcular os juros gerados pela aplicação II.

C = R$ 2000 i = 5% a.a. t = 2 anos

$$1^{\underline{o}} \text{ ano}: \frac{5}{100} \cdot 2000 = \text{R\$ } 100$$

$$\text{M} = \text{R\$ } 2100$$

$$2^{\underline{o}} \text{ ano}: \frac{5}{100} \cdot 2100 = \text{R\$ } 105{,}00$$

$$\text{M} = \text{R\$ } 2205$$

AMOSTRA

Na aplicação I, o montante foi de R$ 1225,04 e o capital inicial foi de R$ 1000. Logo, os juros dessa aplicação foi de R$ 225,04, aproximadamente.

Na aplicação II, o montante foi de R$ 2205 e o capital inicial foi de R$ 2000. Logo, os juros dessa aplicação foi de R$ 205.

Portanto, a diferença entre os juros gerados pela aplicação I e a aplicação II é:

$$R\$\ 225{,}04 - R\$\ 205 = R\$\ 20{,}04$$

A alternativa correta é a letra D.

AMOSTRA

Exercícios de fixação

01. Qual a diferença entre juros simples e juros compostos?

____

____

____

____

02. O gráfico do montante ao longo do tempo na modalidade de juros simples é:

a) uma parábola
b) uma reta
c) uma curva exponencial
d) uma elipse
e) um círculo

03. O gráfico do montante ao longo do tempo na modalidade de juros compostos é:

a) uma parábola
b) uma reta
c) uma curva exponencial
d) uma elipse
e) um círculo

04. Calcule os juros gerados pela aplicação de um capital de R$ 12000, à taxa de juros compostos de 12% ao ano, durante 3 anos.

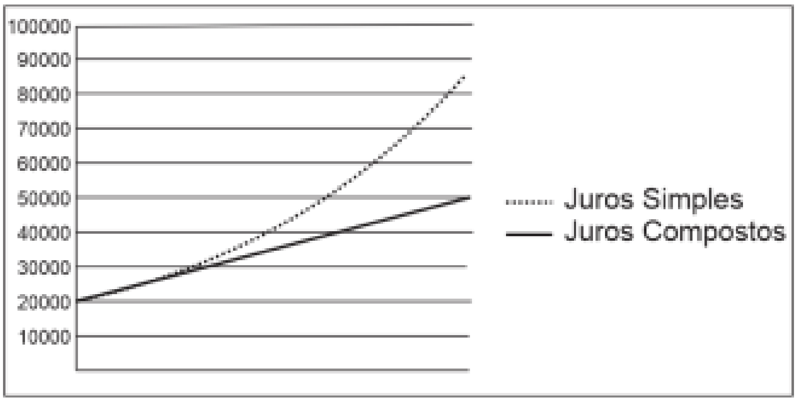
05. Quantos reais a mais será o valor dos juros gerados por um investimento de R$ 2400, com uma taxa de juros compostos de 0,7% ao mês, durante 3 meses, em comparação com a mesma quantia investida em juros simples?

AMOSTRA

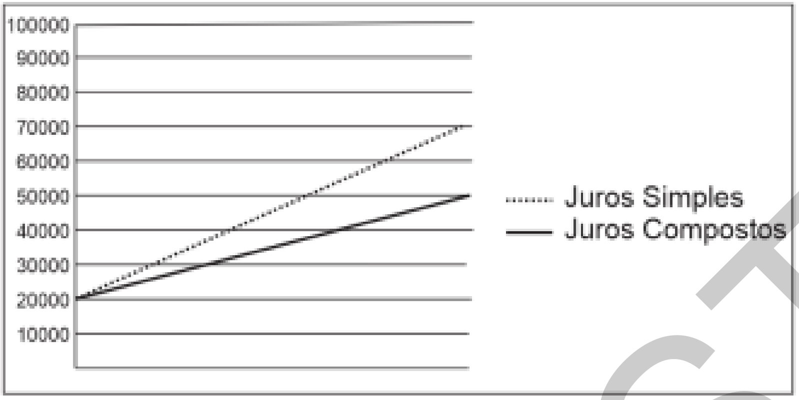
06. (Instituto Consulplan/2024) José fez duas aplicações financeiras em carteiras de investimentos diferentes, ambas com a mesma taxa de juros; porém, uma com juros simples e a outra com juros compostos. Todos os meses José acompanhava a evolução de suas aplicações com base em um gráfico gerado pela plataforma de investimento.

Dessa forma, o gráfico que melhor representa, após alguns meses, a evolução dos valores investidos por José, em cada carteira de investimento é:

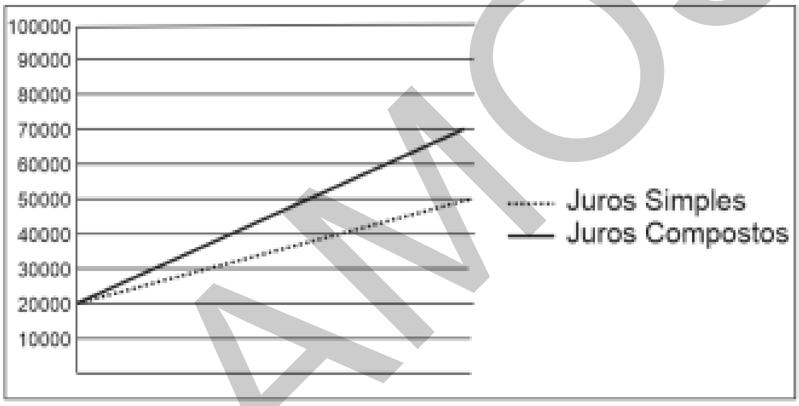
a)



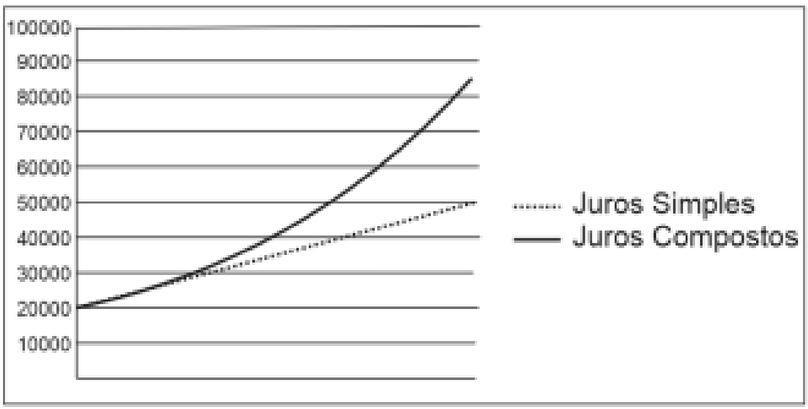
b)



c)



d)



AMOSTRA

Avaliação – Módulo 01

Data: ______ / ____________________ / __________

Aluno(a): ____

Valor: 10,0

Nota: _________

AMOSTRA

Orientações:

1) A avaliação contém **10 questões**.
2) A avaliação contém pontuação máxima de **10,0 pontos**;
3) Cada questão tem valor máximo de **1,0 ponto**;
4) A avaliação é individual;
5) Não é permitido consultar a teoria do livro;
6) Não é permitido solicitar explicação dos enunciados aos pais ou tutores;
7) Não é permitido utilizar nenhuma espécie de eletrônicos;
8) Duração máxima sugerida: **80 minutos**
9) A correção desta avaliação deverá ser feita pelos pais ou tutor responsável, podendo ser realizada com critérios de pontuação zero para cada questão errada, 1,0 para cada questão correta e, de maneira opcional, 0,5 para cada questão parcialmente correta.
10) Revise sua avaliação.

Professor Vinícius Soares

Aquecimento

01. (OBMEP 2013) O pai de Carolina mediu o comprimento da mesa da sala com sua mão e contou 8 palmos. Ela também mediu a mesa do mesmo modo e contou 11 palmos. Qual é o tamanho do palmo de Carolina, se o palmo de seu pai mede 22 centímetros?

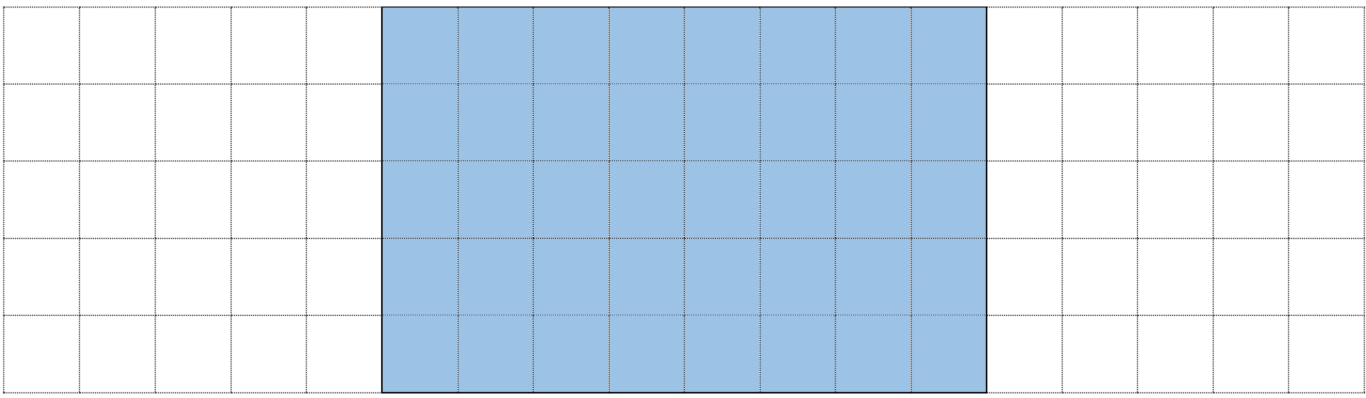
a) 12 cm b) 13 cm c) 14 cm d) 16 cm e) 19 cm

Direto ao assunto

Chegamos ao momento mais fascinante do estudo dos números irracionais: **o número de ouro**! Este maravilhoso número, também conhecido como proporção áurea ou ϕ (phi), tem prendido a imaginação de matemáticos, artistas e cientistas ao longo dos séculos. Sua presença misteriosa e estética em diversas áreas, desde a arquitetura e arte até a natureza e biologia, revela uma harmonia matemática que continua a inspirar e intrigar estudiosos e entusiastas em todo o mundo.

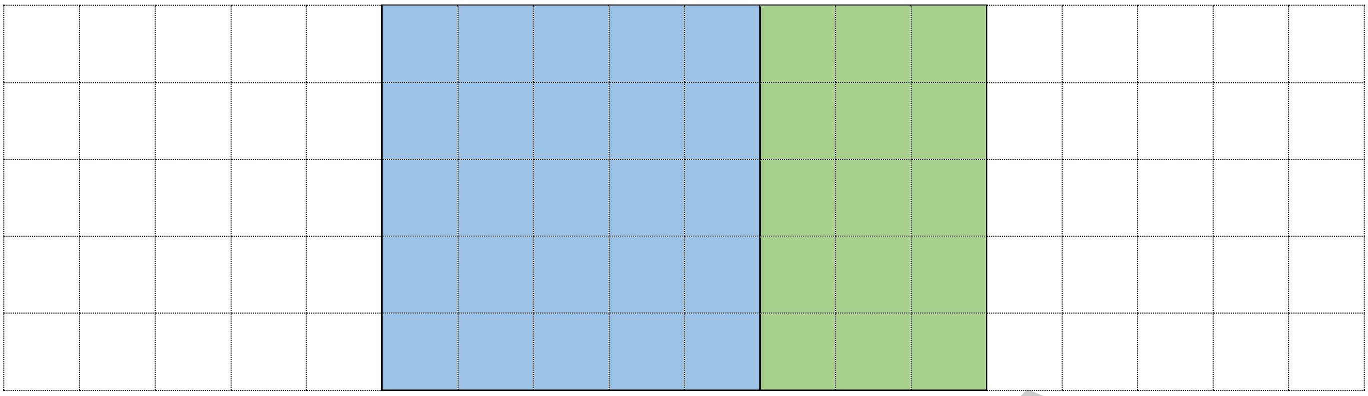
Imagem gerada por Midjourney (https://midjourney.com)

Iniciemos por desenhar na malha abaixo um retângulo de comprimento 8 unidades e largura 5.

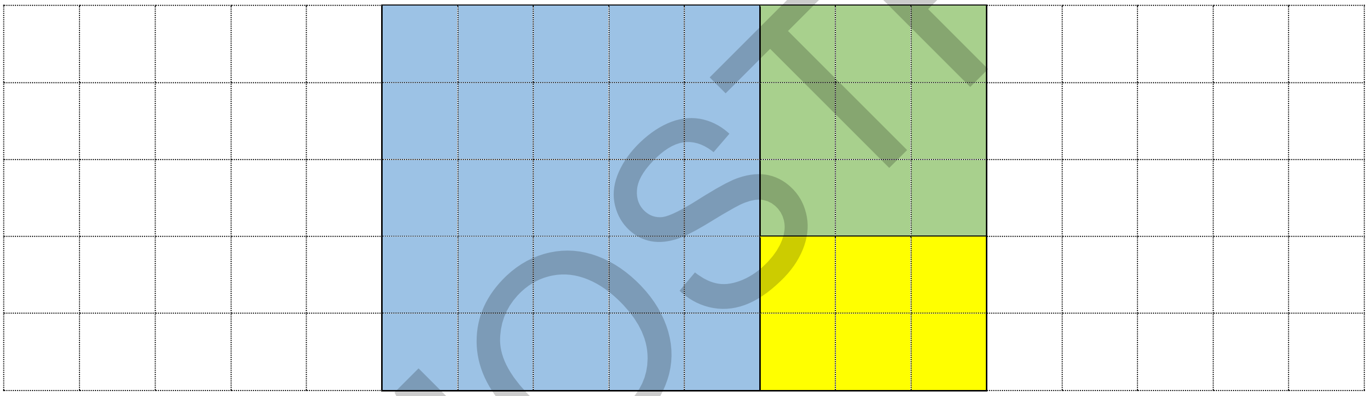


AMOSTRA

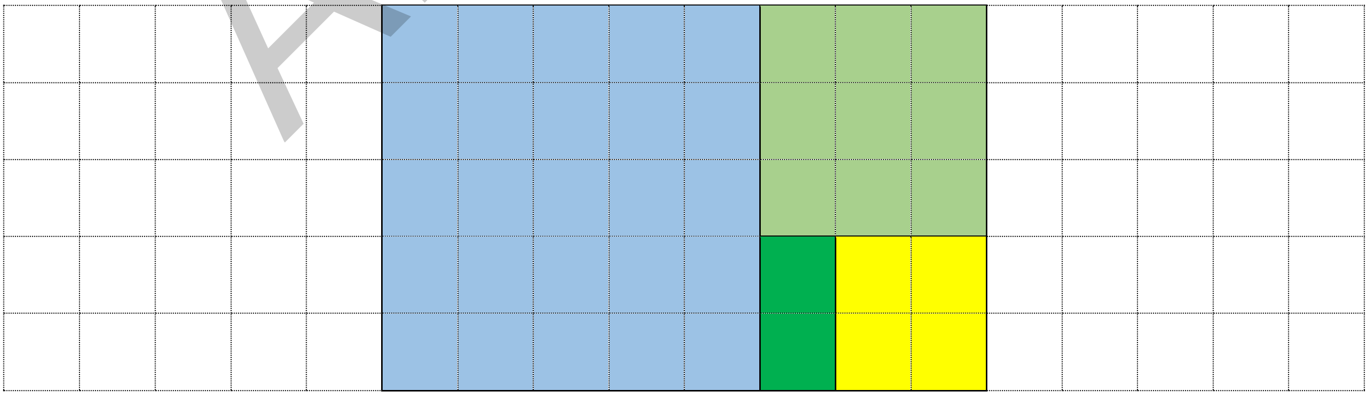
Agora, vamos desenhar na região interior desse retângulo, um outro retângulo de comprimento 3 unidades e largura 5, do seguinte modo:



Desenhemos mais um retângulo, agora no interior do retângulo verde, com comprimento 3 unidades e altura 2, do seguinte modo:

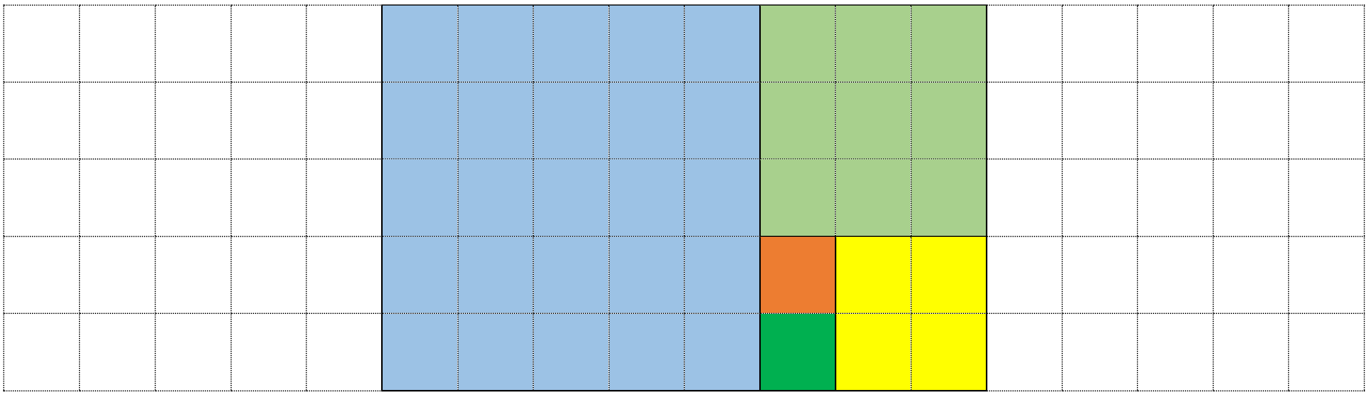


Desenhemos mais um retângulo no interior do retângulo amarelo, com comprimento 1 unidade e largura 2, do seguinte modo:

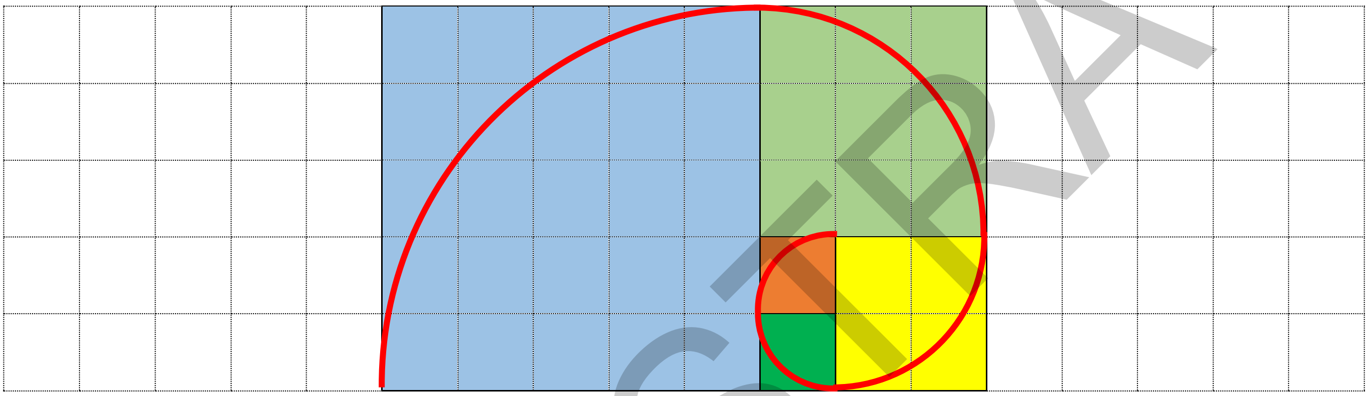


Continuando o padrão mais uma vez, temos:

AMOSTRA



Agora, desenhando um quarto de circunferência em cada quadrado obtido, temos a seguinte linha plana, destacada de vermelho:



Consegue perceber uma semelhança entre essa linha espiral e a imagem na introdução da lição? Pois bem. Há algo mágico envolvido aqui.

- O lado do quadrado laranja mede 1 unidade;
- O lado do quadrado verde mede 1 unidade;
- O lado do quadrado amarelo mede 2 unidades;
- O lado do quadrado verde mede 3 unidades;
- O lado do quadrado azul mede 5 unidades.

Se colocarmos esses números em sequência, ela lhe parecerá familiar? E qual será seu próximo termo? Reflita.

1, 1, 2, 3, 5, ...

Imagem de Leonardo de Pisa gerada por Midjourney (https://midjourney.com)

AMOSTRA

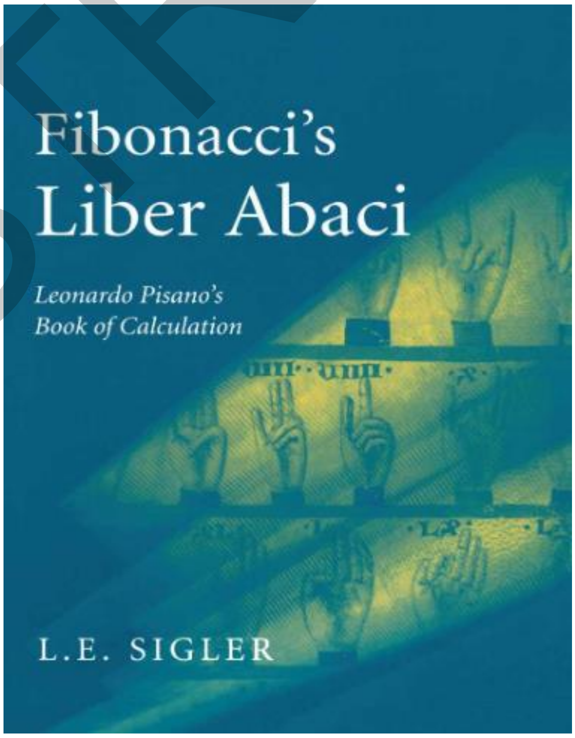
A sequência em questão é a famosa **sequência de Fibonacci**. Fibonacci apresenta essa sequência em sua obra **"Liber Abaci"**, publicada em 1202. Nessa sequência, os dois primeiros números são iguais a 1 e, a partir do terceiro termo, obtém-se cada novo termo somando-se os dois anteriores. Logo, o próximo termo da sequência é $3 + 5 = 8$ e a sequência segue da seguinte forma com seus primeiros 15 termos:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

Certo, professor. Mas, por que citar esses termos? E onde está o número de ouro?

Vejamos. A partir do terceiro termo, vamos calcular a razão entre um termo e o termo imediatamente anterior:

- $2 \div 1 = 2$
- $3 \div 2 = 1{,}5$
- $5 \div 3 = 1{,}666...$
- $8 \div 5 = 1{,}6$
- $13 \div 8 = 1{,}625$
- $21 \div 13 = 1{,}6153...$
- $34 \div 21 = 1{,}61904...$
- $55 \div 34 = 1{,}61764...$
- $89 \div 55 = 1{,}618181...$
- $144 \div 89 = 1{,}61797...$
- $233 \div 144 = 1{,}6180555...$
- $377 \div 233 = 1{,}61802...$
- $610 \div 377 = 1{,}61803...$



Fibonacci's Liber Abaci: A Translation Into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation

À medida em que tomamos termos mais altos na sequência, a razão entre termos consecutivos se torna cada vez mais próxima do número de ouro.

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887498948482 0...$$

AMOSTRA

Por propriedade geométrica, dois segmentos estão em proporção áurea se a razão entre o comprimento do segmento maior e o comprimento do segmento menor é igual à razão entre a soma dos dois comprimentos e o comprimento do segmento maior, ou seja:

Sendo a e b as medidas desses segmentos, com $a > b$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Exemplos:

a) Se nessa equação $a = 1$, $b \cong 0{,}618$ e a razão ${}^{a}/_{b} = \phi$.

b) Se nessa equação $a = 3{,}5$, $b \cong 2{,}163$ e a razão ${}^{a}/_{b} = \phi$.

Percebemos, portanto, que essa equação, de fato, nos fornece pares de números cuja razão entre o maior e o menor é igual à razão áurea.

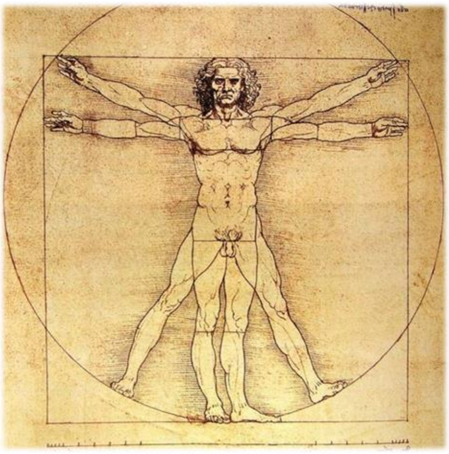
Um retângulo cuja razão entre seus lados é igual ao número de ouro é chamado de **retângulo de ouro**. Para os gregos, o retângulo de ouro representava a lei da beleza matemática e a arquitetura clássica da Grécia possui vários monumentos com retângulos de ouro.

Partenon, Atenas
https://www.pexels.com/pt-br/foto/fotografia-de-baixo-angulo-do-partenon-durante-o-dia-164336/

Templo de Zeus, Atenas
https://www.pexels.com/pt-br/foto/colina-monte-grama-ceu-azul-16629276/

Temos também exemplos notáveis de obras artísticas que utilizaram a proporção áurea, como, por exemplo, as obras de Leonardo da Vinci.

AMOSTRA



O Homem Vitruiviano (Leonardo da Vinci)
https://br.pinterest.com/pin/643171009194447927/

Monalisa (Leonardo da Vinci)
https://br.pinterest.com/pin/105553803703241 80/

A proporção áurea aparece também na natureza, manifestando-se em diversos padrões de crescimento, formas e estruturas de plantas, animais e até fenômenos naturais.

Aloe polyphylla
https://br.pinterest.com/pin/543880092515962110/

Concha de molusco
https://br.pinterest.com/pin/482730272507845 71/

Percebe-se que poderíamos gastar rios de páginas dessa apostila para falar sobre esse número magnífico. Mas optamos por encerrar esse breve resumo com um belo parágrafo de Robert Lawlor:

> “In a sense, the Golden Proportion can be considered as supra-rational or transcendent. It is actually the first issue of Oneness, the only possible creative duality within Unity. It is the most intimate relationship, one might say, that proportional existence - the universe -can have with Unity, the primal or first division of One. For this reason the ancients called it 'golden', the perfect division, and the Christians have related this proportional symbol to the Son of God.” (Sacred Geometry, p.46)

AMOSTRA

Exercícios de fixação

01. Descreva como obter a sequência de Fibonacci e, em seguida, determine seus dez primeiros termos.

____

____

____

____

02. Qual das alternativas abaixo contém um número racional?

a) $\pi = 3{,}141592\ldots$
b) $\sqrt{11}$
c) $e = 2{,}718281\ldots$
d) $2{,}4111\ldots$
e) $\phi = 1{,}618033\ldots$

03. Dados os pares de números inteiros A = (13, 8) e B = (21, 13), qual mais se aproxima do número de ouro?

(   ) A (   ) B

04. Julgue a afirmação: "O número de ouro pode ser representado como uma divisão entre dois números inteiros".

(   ) Verdadeira (   ) Falsa

Justificativa: ____

AMOSTRA

05. Uma das definições algébricas do número de ouro é a solução positiva da equação do 2° grau $x^2 - x - 1 = 0$.

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Calcule o valor do número de ouro usando a aproximação $\sqrt{5} \cong 2{,}236$.

06. Considere um retângulo áureo. Se a medida do lado menor desse retângulo é 5 cm, qual é a medida aproximada de seu lado maior?

07. Escreva a tradução do parágrafo de Robert Lawlor em seu livro *Sacred Geometry*, citado no final dessa lição.

AMOSTRA

Exercícios complementares

01. O número de ouro aparece em diversas áreas, incluindo arte e arquitetura. Pesquise um exemplo famoso de uma obra de arte ou estrutura arquitetônica que utiliza o número de ouro em seu design. Descreva como o número de ouro foi utilizado.

____

____

____

____

____

____

____

02. Podemos afirmar que o número 5,612121212..., por possuir um antiperíodo, é um número irracional.

(   ) Verdadeiro (   ) Falso

Justificativa: ____

03. (AGIRH/2022) Podemos afirmar que dos números abaixo, o único que não pertence ao conjunto dos números irracionais é:

a) $\sqrt{5}$ b) 2,7543275432... c) 0,54783617... d) π

04. A raiz quadrada de 2304 é um número racional? Justifique.

____

____

____

AMOSTRA

05. (Legalle Concursos/2022) Considere as assertivas a seguir:

I. O número 2 pertence ao conjunto dos números inteiros.
II. O número 0,666... pertence ao conjunto dos números racionais.
III. O número 3,14 pertence ao conjunto dos números irracionais.

Está(ão) CORRETA(S):

a) Apenas I. b) Apenas II. c) Apenas I e II. d) Apenas I e III. e) I, II e III.

06. Assinale a alternativa que contém a sequência de Fibonacci.

a) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
b) 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, ...
c) 1, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 14, 23, ...
d) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
e) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...

07. No livro “Sacred Geometry”, Robert Lawlor relaciona o número de ouro com a Trindade. Explique como Lawlor utiliza o conceito de ϕ para ilustrar a ideia da Trindade, baseado no parágrafo traduzido na lição anterior e em pesquisa.

AMOSTRA

Adquira nossos cursos e materiais: https://loja.profviniciusmat.com.br

Aquecimento

01. Efetue as operações com frações

$a)\ \frac{13}{8}+\frac{11}{6}=$

$b)\ \frac{98}{132}\times\frac{143}{105}=$

$c)\ \frac{3}{4}\div\frac{5}{6}=$

Direto ao assunto

Vamos, nessa lição, continuar operando polinômios. Nessa nossa segunda aula, trabalharemos:

i) multiplicação de binômio por binômio;
ii) divisão de polinômio por monômio.

Multiplicação de binômio por binômio

Para multiplicarmos binômio por binômio:

1) aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração;
2) resolvemos as multiplicações de monômio por monômio resultantes;
3) simplificamos a expressão, unindo os termos semelhantes, caso existam.

Exemplo: Seja $A = x + y$ e $B = x - 3$

Vamos calcular $A \cdot B$:

AMOSTRA

$$A \cdot B = (x + y) \cdot (x - 3) = x^2 - 3x + xy - 3y$$

Como não há termos semelhantes, finalizamos nossa multiplicação.

Exemplo: Simplifique a expressão $(4a - 5)(3a - 8)$.

$$(4a - 5)(3a - 8) = 12a^2 - 32a - 15a + 40$$

Reduzindo os termos semelhantes, temos:

$$\begin{aligned}(4a - 5)(3a - 8) &= 12a^2 - 32a - 15a + 40 \\ &= 12a^2 - 47a + 40\end{aligned}$$

Divisão de polinômio por monômio

Para dividirmos um polinômio por um monômio:

1) dividimos cada termo do polinômio pelo monômio;
2) resolvemos as divisões de monômio por monômio resultantes.

Exemplo: Efetue as divisões de polinômios por monômios abaixo:

a) $(25x^3 - 30x^2 + 15x^{10}) \div (-5x^2)$

Para facilitar, vamos aplicar a regra de sinais e escrever cada divisão de monômio por monômio na forma de fração:

$$(25x^3 - 30x^2 + 15x^{10}) \div (-5x^2) = -\frac{25x^3}{5x^2} + \frac{30x^2}{5x^2} - \frac{15x^{10}}{5x^2}$$

AMOSTRA

Efetuando as divisões de monômio por monômio resultantes, temos:

$$-\frac{25x^3}{5x^2}+\frac{30\cancel{x^2}}{5\cancel{x^2}}-\frac{15x^{10}}{5x^2}=-5x+6-3x^8$$

b) $(12x^3y-16x^2y^2-20x^4y^{10})\div 8x^3y$

Para facilitar, novamente vamos aplicar a regra de sinais e escrever cada divisão de monômio por monômio na forma de fração:

$$(12x^3y-16x^3y^2-20x^4y^{10})\div 8x^3y=\frac{12x^3y}{8x^3y}-\frac{16x^3y^2}{8x^3y}-\frac{20x^4y^{10}}{8x^3y}$$

Efetuando as divisões de monômio por monômio resultantes, temos:

$$\frac{12\cancel{x^3y}}{8\cancel{x^3y}}-\frac{16\cancel{x^3}y^2}{8\cancel{x^3}y}-\frac{20x^4y^{10}}{8x^3y}=\frac{3}{2}-2y-\frac{5}{2}xy^9$$

Em alguns casos, a divisão pode não ser exata, de modo que o resultado seja uma **fração algébrica**.

c) $(4x^3-x^2-5x+1)\div 12x^2$

$$(4x^3-x^2-5x+1)\div 12x^2=\frac{4x^3}{12x^2}-\frac{\cancel{x^2}}{12\cancel{x^2}}-\frac{5x}{12x^2}+\frac{1}{12x^2}$$

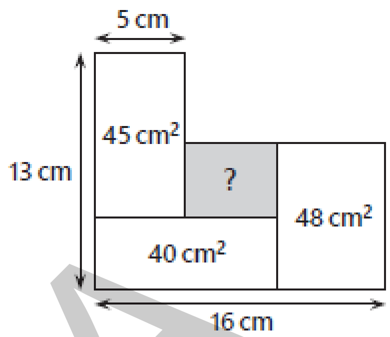
$$=\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}-\frac{5}{12x}+\frac{1}{12x^2}$$

“Um bom ensino de Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.” (Irene de Albuquerque)

AMOSTRA

Aquecimento

01. (Canguru de Matemática/2024) A figura representa quatro retângulos com lados que se tocam. Qual é a área do retângulo cinza em cm^2?



a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 20

02. (OBMEP/2010) João vai de bicicleta ao encontro de sua namorada Maria. Para chegar na hora marcada, ele deve sair às 8 horas e pedalar a 10 km/h ou sair às 9 horas e pedalar a 15 km/h. A que horas é o encontro dos namorados?

a) 10h b) 10h30min c) 11h d) 11h30min e) 12h

AMOSTRA

Direto ao assunto

Querido aluno, chegamos a um conteúdo que considero ser o mais importante do 8° ano. Costumo dizer que esse conteúdo é a “tabuada” dessa série. Porém, antes de mais nada, vamos entender detalhadamente o significado de “produto notável”.

Nesse contexto, a palavra "produto" está se referindo ao resultado de uma multiplicação e "notável" pode ser interpretado como sinônimo de "importante", "memorável", "inesquecível". Logo, "produto notável" está se referindo a uma multiplicação cujo **resultado** é importante.

Agora, a grande pergunta: que multiplicação é essa?

A resposta não é uma única multiplicação. Aqui no nosso currículo serão **cinco**, uma por aula.

I. Quadrado da soma de dois termos
II. Quadrado da diferença de dois termos
III. Produto da soma pela diferença de dois termos
IV. Cubo da soma de dois termos
V. Cubo da diferença de dois termos

Começaremos pelo quadrado da soma de dois termos.

Quadrado da soma de dois termos

Quando temos um número multiplicado por si mesmo, temos uma potência, certo? Mais especificamente, uma potência de expoente 2.

$7 \times 7 = 7^2$	$19 \times 19 = 19^2$	$100 \cdot 100 = 100^2$	$x \cdot x = x^2$

Um número elevado ao quadrado costuma ser lido como "o quadrado de um número". Por exemplo, o quadrado de 3 é três elevado ao quadrado; o quadrado de 11 é onze elevado ao quadrado; o quadrado de x é x elevado ao quadrado.

No caso desse nosso primeiro produto notável, nós teremos o quadrado da **soma** de dois termos (dois monômios). Em outras palavras, nós teremos a soma de dois monômios elevada ao quadrado. É o produto de uma soma por si mesma.

Vamos, inicialmente, exemplificar numericamente essa situação, considerando a soma entre os números 8 e 5.

AMOSTRA

Sabemos que 8 + 5 = 13. Logo, o quadrado da soma de 8 e 5 será:

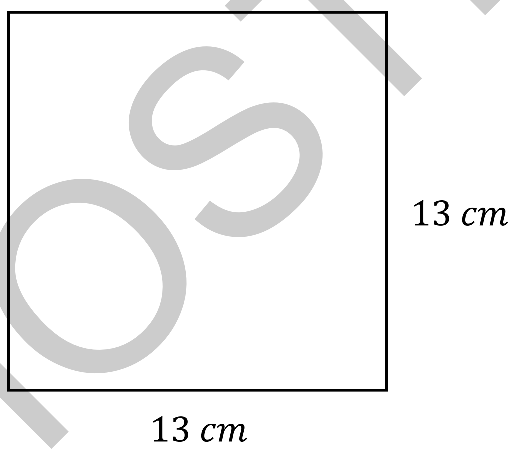
$$(8 + 5)^2 = 13^2 = 169$$

Perceba que a função dos parênteses é justamente garantir que toda a soma entre 8 e 5 fique elevada ao quadrado. Mas o como eliminaríamos os parênteses se a soma fosse entre dois monômios não semelhantes, por exemplo, a e b?

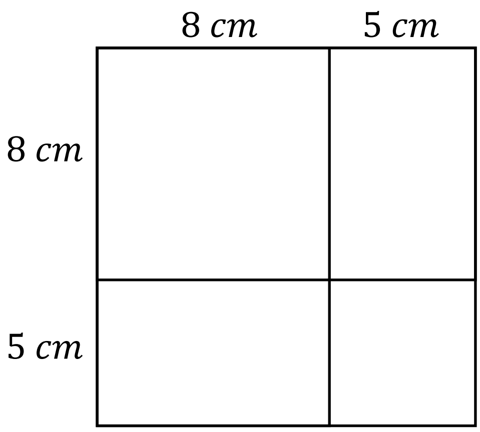
$$(a + b)^2 = ?$$

Sabemos que a e b não são monômios semelhantes e, por isso, não podem ser somados, diferentemente de 8 e 5. Se não podemos somar a e b, como poderemos elevar essa soma ao quadrado?

Vamos voltar para o nosso exemplo numérico, agora ajudados pela geometria. Imaginemos que 13, que é a soma entre 8 e 5, seja a medida, em cm, do lado de um quadrado.

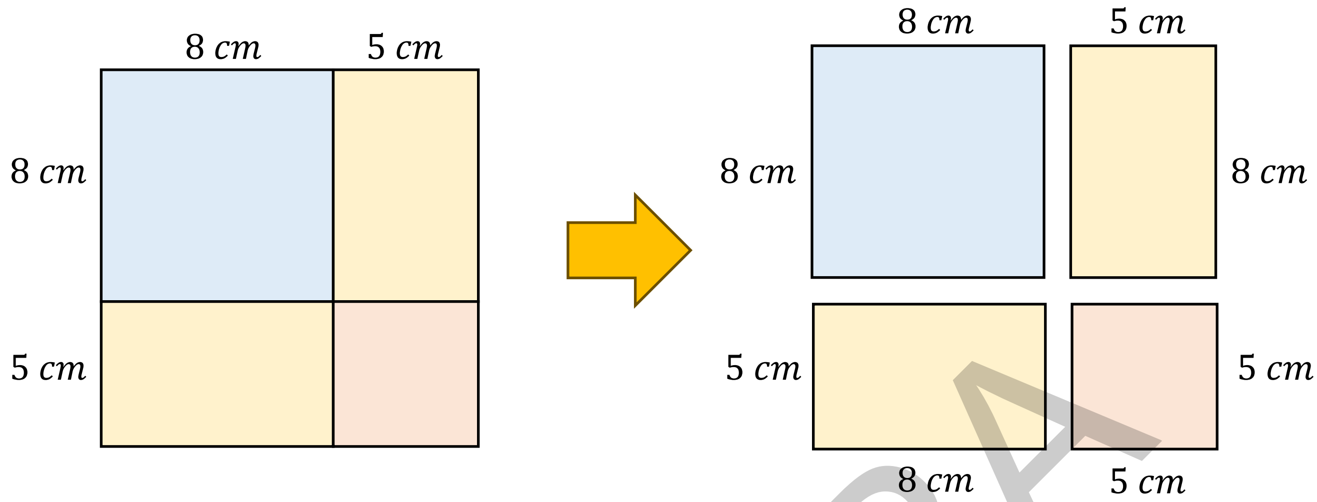


Sabemos que a área desse quadrado é $13 \times 13 = 13^2 = 169$ cm². Agora, vamos repartir seus lados em duas medidas, uma igual a 8 cm e outra igual a 5 cm.



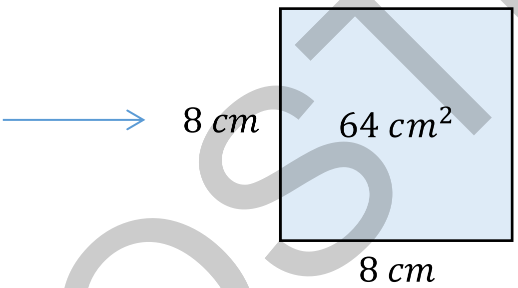
AMOSTRA

Consegue perceber que, nessa divisão, obtivemos dois quadrados e dois retângulos?

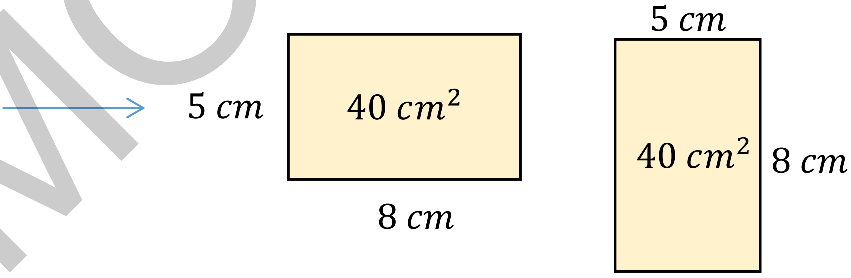


Calculando as áreas de cada um desses quadriláteros, temos:

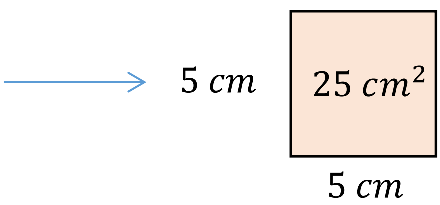
$I)\ 8 \times 8 = 64\ cm^2$



$II)\ 5 \times 8 = 40\ cm^2$



$III)\ 5 \times 5 = 25\ cm^2$



Somando todas essas áreas, qual valor devemos encontrar?

AMOSTRA

Obviamente, as áreas desses quatro quadriláteros somadas, deve, obrigatoriamente, resultar em 169 cm^2, que é a área do nosso quadrado inicial.

Veja:

$$64 + 2 \times 40 + 25 =$$

$$64 + 80 + 25 =$$

$$144 + 25 =$$

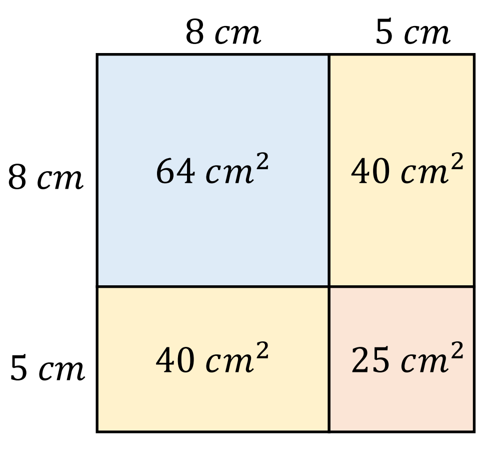
$$169\ cm^2$$

Por fim, analise a forma aritmética de resolução do quadrado da soma entre 8 e 5, comparando-a com a forma geométrica:

$$(8 + 5)^2 = (8 + 5)(8 + 5)$$

Esse produto se comporta como o produto de binômio por binômio. Podemos, portanto, resolvê-lo com a propriedade distributiva.

$$\begin{aligned}(8 + 5)(8 + 5) &= 8 \cdot 8 + 8 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \\ &= 8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 5 + 5^2 \\ &\boxed{= 64 + 2 \cdot 40 + 25} \\ &= 64 + 80 + 25 \\ &= 144 + 25 \\ &= 169\ cm^2\end{aligned}$$



AMOSTRA

Agora temos base para responder a pergunta: como poderemos resolver o quadrado da soma entre a e b?

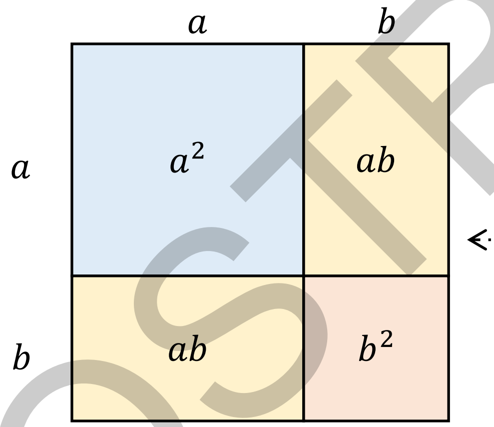
$$(a+b)^2 = ?$$

Simples: com a propriedade distributiva!

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = \boxed{a^2 + ab + ab + b^2}$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Geometricamente, temos:



Para agilizar as resoluções de um quadrado da soma de dois termos, vamos analisar apenas o último resultado, que se tornará nossa <u>regra prática</u>:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$a \longrightarrow$ 1° termo

$b \longrightarrow$ 2° termo

$$(a+b)^2 = \quad a^2 \quad + \quad 2ab \quad + \quad b^2$$

Dica: memorizar! ☞ Quadrado do 1° termo + 2 × 1° termo × 2° termo + Quadrado do 2° termo

AMOSTRA

Exercícios resolvidos

01. Desenvolva o produto notável $(a+3b)^2$ utilizando a propriedade distributiva.

Solução: Utilizando a propriedade distributiva, temos:

$$(a+3b)^2 = (a+3b)(a+3b) = a^2 + 3ab + 3ab + 9b^2$$

$$= a^2 + 6ab + 9b^2$$

02. Desenvolva o produto notável $(3x+y)^2$ utilizando a regra prática.

Solução: Utilizando a regra prática do quadrado da soma de dois termos, temos:

$$(3x+y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$$

03. Determine o 1° e o 2° termo do produto $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)^2$ e, em seguida, desenvolva-o.

Solução:

1° termo: $\frac{1}{2}x$

2° termo: $\frac{2}{3}y$

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{3}y + \left(\frac{2}{3}y\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{4}{9}y^2$$

AMOSTRA

Exercícios de fixação

01. Como podemos definir um produto notável?

____

____

02. Como podemos desenvolver o quadrado da soma de dois termos, caso os termos não sejam semelhantes?

____

____

03. Determine o primeiro e o segundo termo dos produtos da tabela:

Quadrado da soma de dois termos	1° termo	2° termo
$(x + 2y)^2$		
$(x^3 + 3a)^2$		
$(2 + 3z)^2$		
$(abc + \text{xyz})^2$		
$(x^2y^3 + x^3y^2)^2$		
$\left(\frac{x^5}{5} + \frac{y^4}{4}\right)^2$		
$(0{,}3a + 0{,}4b)^2$		
$\left(\frac{2}{7}m^3 + \frac{3}{7}n^2\right)^2$		
$\left(\frac{1}{5} + x\right)^2$		

AMOSTRA

04. Assinale a alternativa que contém uma igualdade verdadeira:

a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
c) $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$
d) $(a + b)^2 = a^2 - b^2$
e) $(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

05. Resolva e compare os resultados.

$(7 + 5)^2 =$	$7^2 + 5^2 =$

Conclusão: (   ) Os resultados são iguais   (   ) Os resultados são diferentes

06. Resolva e compare os resultados.

$(7 + 5)^2 =$	$7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2 =$

Conclusão: (   ) Os resultados são iguais   (   ) Os resultados são diferentes

07. Utilizando uma régua, represente geometricamente $(3 + 2)^2$, utilizando o centímetro como unidade de medida.

AMOSTRA

08. Desenvolva, utilizando a regra prática, os produtos notáveis:

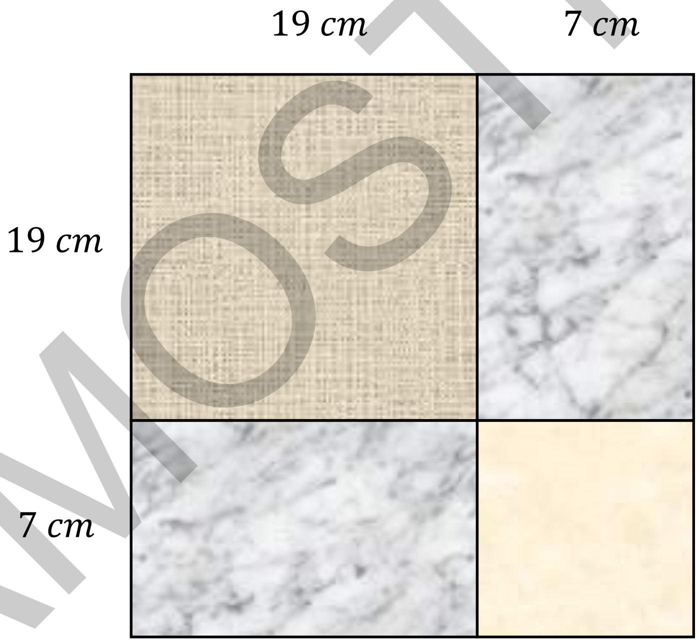
$a)\ (x+y)^2 =$
$b)\ (x+2y)^2 =$
$c)\ (x^2+y)^2 =$
$d)\ (x^5+y)^2 =$
$e)\ (3x+4y)^2 =$
$f)\ (0{,}5x+0{,}3y)^2 =$
$g)\ (x^4+7y^3)^2 =$
$h)\ \left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^2 =$
$i)\ \left(\frac{3}{4}x^3+\frac{4}{3}y^2\right)^2 =$
$j)\ (a^2b+b^2a)^2 =$
$k)\ (1{,}1a^3b+1{,}1ab^3)^2 =$
$l)\ \left(\frac{5a^2}{2}+\frac{2b^2}{5}\right)^2 =$
$m)\ (a+3)^2$
$n)\ (5a+4)^2 =$
$o)\ (7+3b)^2 =$
$p)\ (11+5b^3)^2 =$
$q)\ (abc+1)^2 =$
$r)\ (0{,}3m+0{,}7n)^2 =$
$s)\ (2+3k^{10})^2 =$

AMOSTRA

Exercícios complementares

01. Represente geometricamente $(a+b)^2$.

02. Calcule as áreas coloridas e, em seguida, a área do quadrado de lado 26 cm.



Área do quadrado de lado 26 cm: ______________________

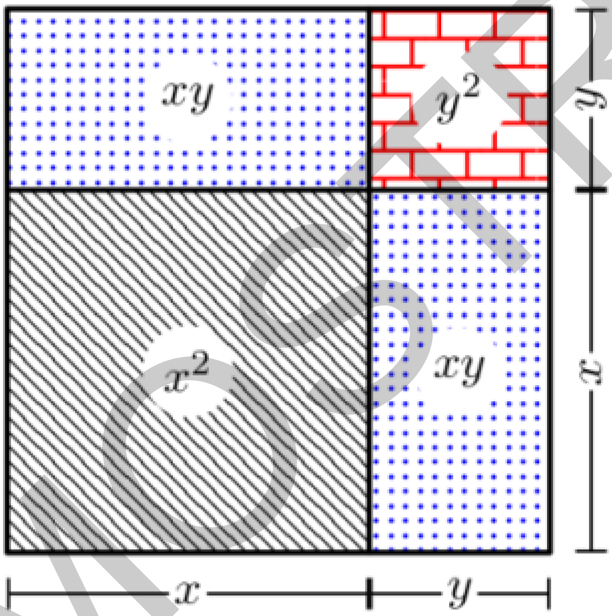
AMOSTRA

03. (Objetiva Concursos/2022) Assinalar a alternativa que apresenta o desenvolvimento correto do produto notável abaixo:

$$(2x + 3y)^2$$

a) $4x^2 + 9y^2$
b) $4x^2 + 6y^2$
c) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
d) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

04. (IMPARH/2021) Observando as áreas marcadas na figura e o cálculo da área total do quadrado de lado $x + y$, temos uma representação geométrica de qual produto notável?



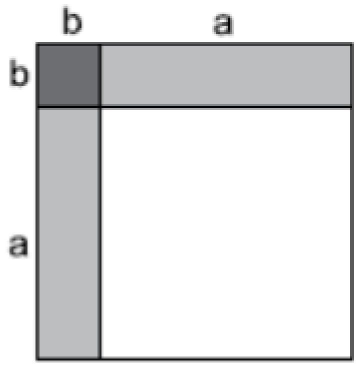
a) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
b) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
c) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
d) $x^2 + y^2 = x^2 + xy + y^2$

05. (UNIVALI/2021) Desenvolvendo o produto notável $(x^3 + x)^2$, temos:

a) $x^6 + x^2$
b) $x^6 + 2x^4 + x^2$
c) $x^6 + 2x^2 + 1$
d) $x^6 + x^2 + 1$

AMOSTRA

06. (VUNESP/2019) Considere a seguinte figura:



A figura pode ser utilizada para uma abordagem geométrica

a) do produto notável quadrado da diferença.
b) do produto notável quadrado da soma.
c) do produto notável da diferença pela soma.
d) da fatoração de um quadrado perfeito.
e) da fatoração de um cubo perfeito.

07. Desenvolva o produto notável $(5 + x)(5 + x)$.

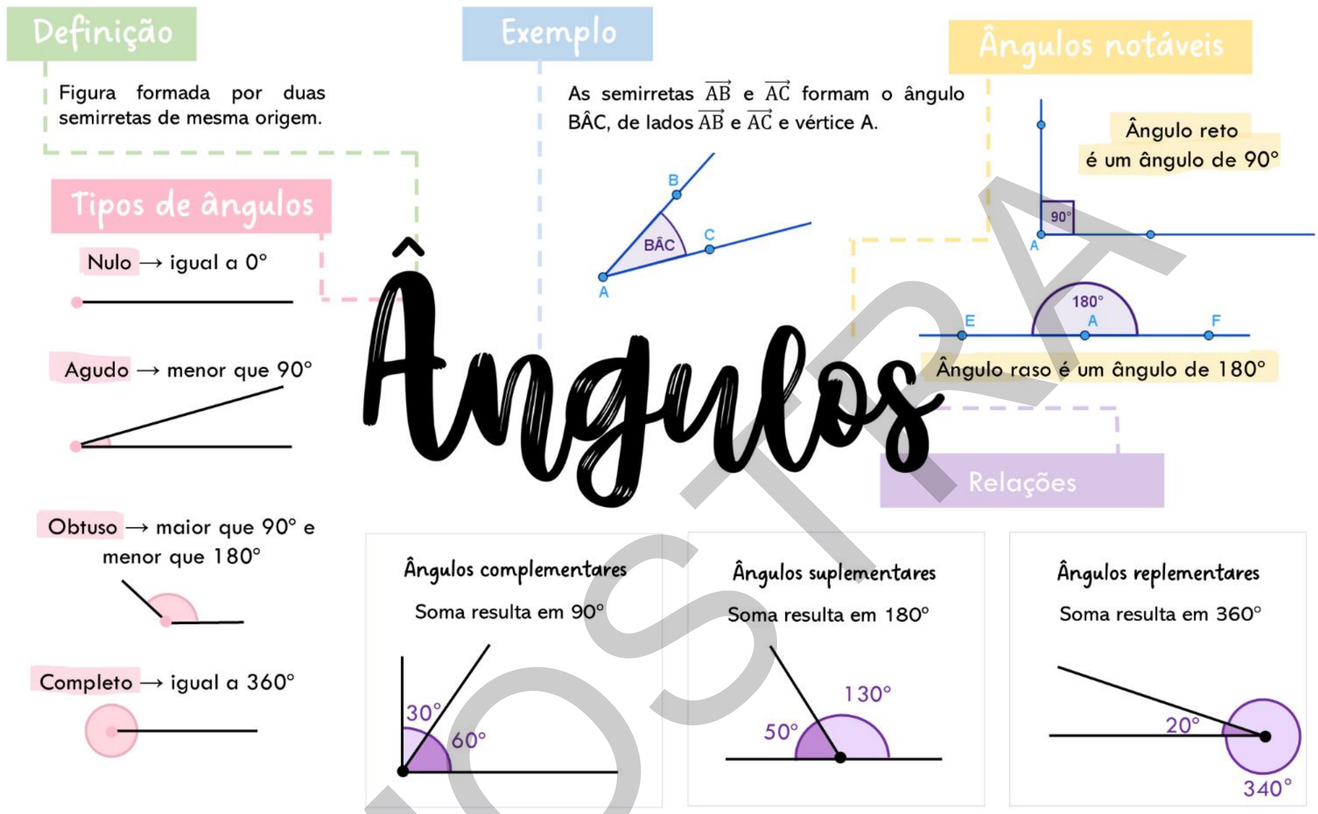
08. (FUNDATEC/2022) Sabendo que $(a + b)^2 = 16$ e que $ab = 3$, é correto afirmar que $a^2 + b^2$ vale:

a) 4. b) 6. c) 8. d) 10. e) 16.

AMOSTRA

Aquecimento

01. Memorize a definição e as principais classificações dos ângulos.



Direto ao assunto

Imagine que você está em uma praia, olhando para o mar. Perguntar se você sabe nadar pode parecer simples, mas nadar em uma piscina calma é uma coisa, enquanto nadar em um mar agitado durante uma tempestade é algo completamente diferente. A piscina tem limites, bordas seguras para você segurar quando estiver cansado. Já no mar, especialmente em meio a uma tempestade, não há bordas, e você precisa estar preparado para enfrentar as ondas, as correntes e o inesperado.

Assim também é o aprendizado. Muitas vezes, navegamos em águas tranquilas, revisando o que já sabemos. Mas, às vezes, nos deparamos com conteúdos mais profundos e desafiadores, que exigem mais de nós. E é nessa hora que saber "nadar" – ou seja, ter uma base sólida e confiança – faz toda a diferença.

AMOSTRA

Hoje, vamos mergulhar em um mar mais profundo nos nossos produtos notáveis. Pode parecer difícil no começo, como nadar em um mar tempestuoso, mas com paciência e prática, você verá que é possível dominar até as ondas mais fortes. Vamos começar?

Cubo da soma de dois termos

Entender esse título não é tarefa difícil. Tal como o quadrado da soma de dois termos é uma soma de dois monômios elevada ao quadrado, o cubo da soma de dois termos é uma soma de dois monômios elevada ao cubo, ou seja, à terceira potência.

$$(a+b)^3$$

Para facilitar o seu desenvolvimento algébrico, temos uma excelente carta nas mangas: o quadrado da soma de dois termos. Veja:

$$(a+b)^3 = \underbrace{(a+b)(a+b)}_{\text{Quadrado da soma de dois termos}}(a+b)$$

Aplicando sua regra, temos:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

Agora, temos o produto de um trinômio por um binômio. Apliquemos a propriedade distributiva.

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

AMOSTRA

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

Reduzindo os termos semelhantes, temos:

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Chegamos, enfim, na forma mais reduzia do cubo da soma de dois termos.

$a \longrightarrow$ 1° termo $\qquad b \longrightarrow$ 2° termo

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Dica: memorizar!

Cubo do 1° termo	+	3 × quadrado do 1° termo × 2° termo	+	3 × 1° termo × quadrado do 2° termo	+	Cubo do 2° termo

AMOSTRA

Para facilitar nossa memorização, temos uma curiosidade bastante interessante, que conecta o desenvolvimento de potências de binômios com o que conhecemos como Triângulo de Pascal.

Primeiramente, vamos ao triângulo. Nele, começaremos com um número 1 na linha zero e dois números 1 na linha um. A partir da linha dois, o primeiro e o último número sempre serão 1 e os números intermediários serão resultados da soma dos números da linha superior que se encontram na mesma coluna do número intermediário correspondente e o da coluna anterior. Veja:

Linha 0:	1				
Linha 1:	1	1			
Linha 2:	1	2	1		
Linha 3:	1	3	3	1	
Linha 4:	1	4	6	4	1

Observe, no exemplo da página anterior, que o número 2, destacado na linha 2, foi resultado da soma do número 1 da linha superior de mesma coluna e do número 1 à esquerda. Veja outro exemplo:

Linha 0:	1				
Linha 1:	1	1			
Linha 2:	1	2	1		
Linha 3:	1	3	3	1	
Linha 4:	1	4	6	4	1

O número 3 no exemplo acima, destacado na linha 3, foi resultado da soma do número 2 da linha superior de mesma coluna e do número 1 à esquerda. Veja mais um exemplo:

Linha 0:	1				
Linha 1:	1	1			
Linha 2:	1	2	1		
Linha 3:	1	3	3	1	
Linha 4:	1	4	6	4	1

O número 6 no exemplo acima, destacado na linha 4, foi resultado da soma do número 3 da linha superior de mesma coluna e do número 3 à esquerda.

AMOSTRA

O expoente de cada binômio é o mesmo que o número da linha, e os números contidos em cada linha são iguais aos coeficientes do desenvolvimento do binômio:

$$(a+b)^0 = 1$$

Linha 0: 1

$$(a+b)^1 = a + b = 1a + 1b$$

Linha 1: 1 1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

Linha 2: 1 2 1

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

Linha 3: 1 3 3 1

É surpreendentemente incrível, não é? Mas não para por aí. Observe também o expoente do binômio e o grau de cada termo do desenvolvimento dos binômios:

$$(a+b)^0 = 1$$

Grau do termo = 0

$$(a+b)^1 = a + b = a^1 + b^1$$

Grau de cada termo = 1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2a^1b^1 + b^2$$

Grau de cada termo = 2

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + b^3$$

Grau de cada termo = 3

AMOSTRA

No último exemplo, podemos perceber o grau dos expoentes do 1° termo a diminuindo e o grau dos expoentes do 2° termo b aumentando:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3$$

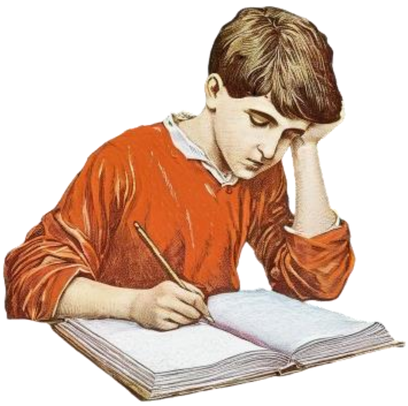
Com essas propriedades, podemos facilmente formular o desenvolvimento de binômios da forma $(a+b)^n$. Tal fórmula é conhecida como **Binômio de Newton**.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Com todas essas fascinantes propriedades, o Binômio de Newton nos ajuda a memorizar com mais facilidade os termos no desenvolvimento de somas de cubos e até mesmo de potências maiores. No entanto, não vamos nos aprofundar nessa fórmula e em seus aspectos fascinantes neste momento. Mas fiquem atentos, pois deixarei um desafio especial.

Utilizando-se das características apresentadas, desenvolva o binômio.

$(a+b)^4 =$

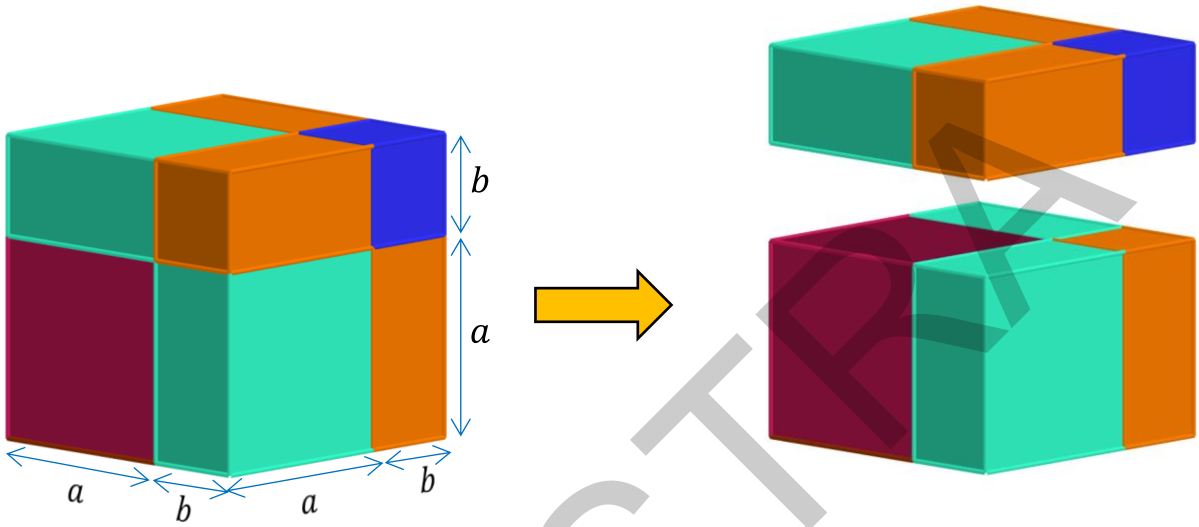


(Confira a resposta na próxima página.)

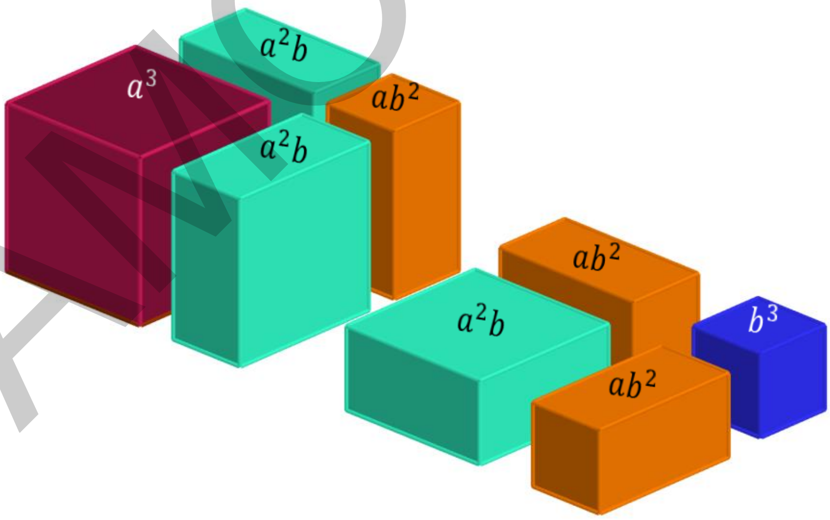
AMOSTRA

Resposta: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
Os coeficientes utilizados foram os da linha 4 do Triângulo de Pascal
e o grau de cada monômio é 4, com os de a decrescentes e os de b crescentes.

Para finalizar nossa lição, analisaremos a geometria do cubo da soma de dois termos. Seja $(a+b)$ a medida da aresta de um cubo, com $a > b$. A expressão $(a+b)^3$ nos fornece seu volume.



Separando cada um dos sólidos, temos os volumes calculados separadamente:



AMOSTRA

Assim, fica fácil perceber:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Exercícios de fixação

01. Desenvolva os seguintes produtos notáveis.

$a)\ (a+2b)^3 =$
$b)\ (3a+b^2)^3 =$
$c)\ (7+x)^3 =$

02. Construa o Triângulo de Pascal até a linha 5.

Linha 0						
Linha 1						
Linha 2						
Linha 3						
Linha 4						
Linha 5						

AMOSTRA

03. Utilizando os coeficientes do Triângulo de Pascal acima e as propriedades das potências de binômios, desenvolva:

$(a+b)^5 =$

04. A expressão do volume de um cubo de aresta (a^3+b^3) é igual a:

a) a^6+b^6
b) a^9+b^9
c) $a^6+3a^5b^3+3a^3b^5+b^6$
d) $a^9+3a^6b^3+3a^3b^6+b^9$
e) $a^9+a^6b^3+a^3b^5+b^9$

Exercícios complementares

01. Desenvolva os seguintes produtos notáveis.

$a)\ (3x^2 + 2y)^3 =$
$b)\ (4m + 3n^2)^3 =$
$c)\ (x^3 + 1)^3 =$

02. Construa o Triângulo de Pascal até a linha 6.

Linha 0							
Linha 1							
Linha 2							
Linha 3							
Linha 4							
Linha 5							
Linha 6							

03. Utilizando os coeficientes do Triângulo de Pascal acima e as propriedades das potências de binômios, desenvolva:

$(a + b)^6 =$

04. (Método Soluções Educacionais/2019) Acerca dos produtos notáveis, assinale a alternativa incorreta.

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $(a + b)(a - b) = a^2 - ab - b^2$
d) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

AMOSTRA

Aquecimento

01. Fatore as expressões algébricas. Caso necessário, utilize mais de um caso de fatoração.

$a)\ 7x^2 - 7y^2 =$
$b)\ x^3 - 2x^2 + x =$
$c)\ 2x^3 + 2000 =$
$d)\ ax^2 + bx^2 - 4a - 4b =$

02. Desenvolva os produtos notáveis:

$a)\ (x+y)^2 =$
$b)\ (x-y)^2 =$
$c)\ (x+y)(x-y) =$
$d)\ (x+y)^3 =$
$e)\ (x-y)^3 =$

AMOSTRA

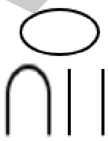
Um pouco de história

Você já ouviu falar no Papiro de Rhind? Ele é um dos mais antigos manuscritos de Matemática que se tem conhecimento. Data-se de, aproximadamente, 1650 a.C, e contém 87 problemas matemáticos do Egito Antigo, incluindo frações, cálculo de áreas e volumes.

Atualmente, o Papiro se encontra no acervo do Museu Britânico. Mede cerca de 5 metros de comprimento e 33 cm de largura.

Fonte da imagem: SILVA, Jorge N.
Egipto - Senet. Revisão de Edimpresa.

Alguns dos problemas encontrados no Papiro trabalham conceitos de frações. Antigamente, os egípcios escreviam as frações com numerador 1, da seguinte forma:

Símbolo	Fração
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{12}$

Por volta do século XIII, com o famoso trabalho de Leonardo de Pisa (Fibonacci), o "Liber Abaci" (1202), o uso de frações numéricas como conhecemos hoje foi popularizado.

Al-Khwarizmi (século IX), François Viète (século XVI) e René Descartes (Século XVII) deixaram grandes contribuições para o desenvolvimento da álgebra, incluindo frações que conhecemos hoje por **frações algébricas**, tópico que, a partir de agora, será por nós estudado.

AMOSTRA

Direto ao assunto

Temos um grupo de 54 enfermeiros. Eles precisam formar equipes, de modo que cada equipe contenha o mesmo número de enfermeiros e de modo que esse número seja maior que 1 e menor que 20.

a) Quantos enfermeiros poderão ter na equipe, de acordo com os critérios dados?

b) Quantas equipes poderão ser formadas em cada caso?

Pense por alguns minutos antes de conferir a resposta.

Com aritmética, podemos pensar nos divisores de 54 que são maiores que 1 e menores que 20 e responder aos dois itens com uma única tabela. Veja:

Quantidade de enfermeiros por equipe	Quantidade de equipes
2	27
3	18
6	9
9	6
18	9

No entanto, como poderíamos generalizar, algebricamente, esse problema?

Pense por mais alguns minutos antes de conferir a resposta.

AMOSTRA

a) Seja n a quantidade de pessoas por equipe, de modo que $n \in \mathbb{N}, 1 < n < 20$ e de modo que n seja um divisor de 54.

b) De acordo com o item anterior, o total de equipes que poderão ser formadas é dado por

$$\frac{54}{n}$$

Esse último resultado é conhecido como **fração algébrica**.

> A divisão de dois polinômios, dada na forma fracionária $\frac{P}{Q}$, com $Q \neq 0$, é chamada de **fração algébrica**.

A restrição $Q \neq 0$ é essencial para que uma fração algébrica exista, uma vez que divisão por 0 ou não existe ou é indeterminada. Encontrar os valores da variável que tornam a fração algébrica válida é encontrar sua **condição de existência** ou o seu **domínio**.

Exemplos:

a) A condição de existência da fração algébrica $\frac{4x}{y}$ é $y \neq 0$.

b) A condição de existência da fração algébrica $\frac{a}{b-1}$ é $b \neq 1$.

Considerando válidas as condições de existência, uma fração algébrica pode resultar em um número inteiro ou em um polinômio.

Exemplos:

$$\frac{6ab}{3ab} = 2 \qquad \frac{abc + abd}{ab} = \frac{ab(c+d)}{ab} = c + d$$

AMOSTRA

Exercícios de fixação

01. Faça uma breve revisão dos principais conceitos relacionados à fração.

a) Como podemos definir uma fração?

____

b) Qual o significado do numerador e do denominador em uma fração?

____

____

c) Encontre duas frações equivalentes à fração abaixo:

$$\frac{2}{5} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

d) Simplifique a fração abaixo até encontrar sua forma irredutível.

$$\frac{64}{72} =$$

e) Compare as frações abaixo:

$$\frac{13}{20} \qquad \frac{33}{50}$$

f) Resolva a expressão com frações:

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{8} - \frac{1}{10} =$$

g) Resolva a expressão com frações:

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \times \frac{3}{10} =$$

AMOSTRA

02. Escreva as frações algébricas correspondentes a cada caso, considerando válidas as condições de existência.

a) R$ 70 divididos igualmente para x pessoas.
b) 800 biscoitos repartidos igualmente em p pacotes.
c) A velocidade média de um carro que percorreu y km em $t+1$ horas.
d) A despesa x de uma festa dividida igualmente entre $z+10$ pessoas.

AMOSTRA

03. O presente de Natal de Antônio será dado por seus $(x-1)$ filhos, de modo que cada filho pague a mesma quantia. O valor do presente é y reais e o filho mais novo, ao comprá-lo, conseguiu um desconto de z reais. Determine a fração algébrica que indique quanto cada irmão pagará pelo presente de Antônio.

04. Um kit escolar contém 3 canetas e 2 lápis. Cada caneta custa x reais e cada lápis custa y reais. Dispondo de Q reais, quantos kits desse poderei comprar? Indique a resposta na forma de fração algébrica.

05. Determine a condição de existência em cada caso:

$a)\ \dfrac{3x}{a}$	$b)\ \dfrac{5x}{a+1}$
$c)\ \dfrac{6m+n}{m-n}$	$d)\ \dfrac{x^2+3}{x-3}$

06. Assinale quais frações irão resultar em um número inteiro, considerando válidas as condições de existência:

( ) $\dfrac{6+a}{a} =$	( ) $\dfrac{5x}{5} =$
( ) $\dfrac{6ab}{-ab} =$	( ) $\dfrac{x^2}{x^2} =$

07. Uma caixa d’água possui 1 m³ de água. Ela será esvaziada em t horas. Determine a fração algébrica que indica quantos litros de água dessa caixa serão esvaziados, em média, por hora.

08. Waldo viajou de carro a uma velocidade média de $\dfrac{400}{t}$ km/h e Vinícius fez o mesmo percurso, porém com velocidade média de $\dfrac{400}{t+1}$ km/h. Qual dos dois obteve uma maior velocidade média nesse percurso? Justifique.

____

____

____

AMOSTRA

Exercícios complementares

01. Escreva as frações algébricas correspondentes a cada caso, considerando válidas as condições de existência.

a) R$ 80 divididos igualmente para $x + 1$ pessoas.
b) 1800 biscoitos repartidos igualmente em $q - 2$ pacotes.
c) A velocidade média de um carro que percorreu d km em n horas.
d) A razão entre x pênaltis convertidos em um total de $x + y$ tentativas.

02. O IMC – Índice de Massa Corporal – de uma pessoa é dado pela razão entre a massa m da pessoa e o quadrado de sua altura h. Determine a fração algébrica que representa o IMC de uma pessoa.

03. Em um açougue, o quilograma de uma carne está R$ 50,00. Se uma pessoa possui x reais para comprar y kg dessa carne, qual fração algébrica determinará a quantidade máxima de quilogramas dessa carne que poderá ser comprada?

AMOSTRA

04. Determine a condição de existência em cada caso:

$a)\ \dfrac{3x}{p-1}$	$b)\ \dfrac{5x}{p+1}$
$c)\ \dfrac{6m+n}{p-q}$	$d)\ \dfrac{x^2+3}{p+q}$

05. Assinale quais frações irão resultar em um número inteiro, considerando válidas as condições de existência:

( ) $\dfrac{6+2a}{2b} =$	( ) $-\dfrac{7ax}{ax} =$
( ) $\dfrac{6a^2b}{ab} =$	( ) $\dfrac{3x^2}{2x^2} =$

06. Um terreno de 2 hectares será repartido em $x+y$ lotes. Determine a fração algébrica que indica quantos m^2 de área cada lote desse terreno terá.

07. Uma pizza A foi repartida em p pedaços e uma pizza B, de mesmo tamanho que a pizza A, foi repartida em $p+2$ pedaços. Qual pizza possui pedaços com maior tamanho? Justifique.

____

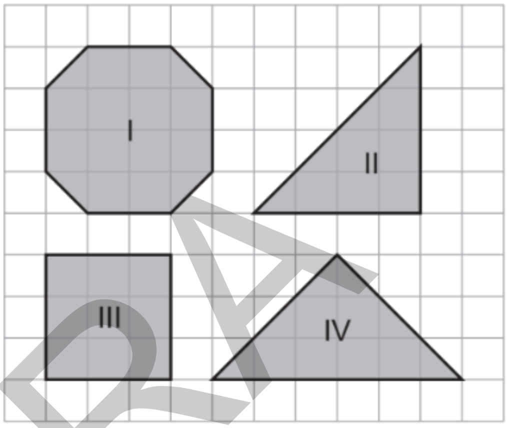
____

____

AMOSTRA

Aquecimento

01. (OBMEP/15) Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?

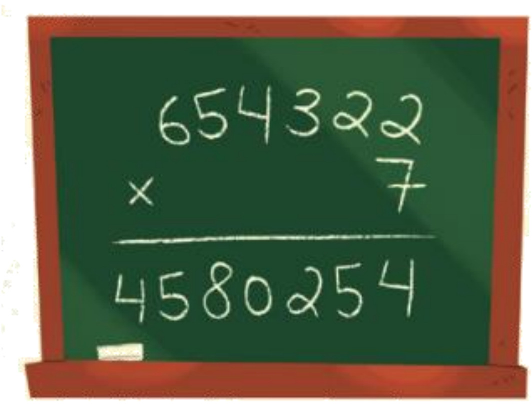


a) IV e III
b) IV e II
c) IV e I
d) III e II
e) II e I

02. (OBMEP/2015) Pedrinho colocou 1 copo de suco em uma jarra e, em seguida, acrescentou 4 copos de água. Depois decidiu acrescentar mais água até dobrar o volume que havia na jarra. Ao final, qual é o percentual de suco na jarra?

a) 5%
b) 10%
c) 15%
d) 20%
e) 25%

03. (OBMEP/2015) O número 4 580 254 é múltiplo de 7. Qual dos números abaixo também é múltiplo de 7?



a) 4580249
b) 4580248
c) 4580247
d) 4580246
e) 4580245

AMOSTRA

Direto ao assunto

Nesta lição, vamos nos dedicar ao cálculo do mínimo múltiplo comum (MMC) entre dois polinômios. A técnica utilizada será a fatoração isolada.

Exemplo: Calcule o MMC entre os polinômios.

a) $x + y$ e $x - y$

Como os polinômios já estão na sua forma fatorada, o MMC, pelo método da fatoração isolada, é dado pelo produto entre eles.

Portanto, o MMC entre $x + y$ e $x - y$ é

$$(x + y)(x - y) \text{ ou } x^2 - y^2.$$

Dica: Revisar produtos notáveis e casos de fatoração.

b) $x + y$ e $x^2 - y^2$

Fatorando o polinômio $x^2 - y^2$, temos:

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Logo, pelo método da fatoração isolada, o MMC entre $x + y$ e $x^2 - y^2$ é:

$$(x + y)(x - y) \text{ ou } x^2 - y^2.$$

c) $a^2 - b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ e $a^2 + 2ab + b^2$

Fatorando os polinômios, temos:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Logo, pelo método da fatoração isolada, o MMC entre $a^2 - b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ e $a^2 + 2ab + b^2$ é:

$$(a + b)^2 \cdot (a - b)^2$$

AMOSTRA

d) $3x + 3y$ e $4x^2 + 8xy + 4y^2$

Fatorando os polinômios, temos:

$3x + 3y = 3(x + y)$
$4x^2 + 8xy + 4y^2 = 4(x^2 + 2xy + y^2) = 2^2 \cdot (x + y)^2$

Logo, pelo método da fatoração isolada, o MMC entre $3x + 3y$ e $4x^2 + 8xy + 4y^2$ é:

$$3 \cdot 2^2 \cdot (x + y)^2 = 12(x + y)^2$$

AMOSTRA