Prof. Vinicius Soares

A Matemática do Ensino Fundamental

Apostila do 8º Ano

Segundo Semestre

Prof. Vinícius Soares

A Matemática Do Ensino Fundamental

Apostila do 8° Ano

Segundo Semestre

Este livro pertence a:

____

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

S237m Santos, Vinícius Soares dos.
A Matemática do Ensino Fundamental: 8º Ano / Vinícius Soares dos Santos. – Goiânia, GO: Ed. do Autor, 2024.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-5872-798-9

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Título.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Conteúdo

2º semestre

Módulo 07 – Equações e inequações
1. Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita
2. Resolução de inequações do 1º grau com uma incógnita
3. Equações fracionárias
4. Equações literais

Módulo 08 – Sistemas de equações
1. Resolução de sistemas 2×2
2. Discussão de sistemas 2×2

Módulo 09 – Ângulos
1. Ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal

Módulo 10 – Polígonos
1. Polígonos e seus elementos
2. Perímetro de um polígono
3. Diagonais de um polígono convexo
4. Soma dos ângulos internos e externos de um polígono convexo
5. Ângulos de um polígono regular
6. Ângulo central de um polígono regular

Módulo 11 – Triângulos
1. Elementos de um triângulo
2. Altura de um triângulo
3. Mediana de um triângulo
4. Bissetriz de um triângulo
5. Mediatriz de um segmento
6. Congruência de triângulos
7. Propriedades dos triângulos isósceles e equilátero

Módulo 12 – Circunferência
1. Circunferência e seus elementos
2. Comprimento da circunferência
3. Área do círculo
4. Posições entre reta e circunferência
5. Posições entre duas circunferências
6. Arco de circunferência e ângulo central
7. Medida do ângulo central
8. Medida do ângulo inscrito

- ✅ Revisões semanais;
- ✅ Exercícios complementares;
- ✅ Exercícios de vestibulares, concusos e olimpíadas;
- ✅ Avaliação por módulo;
- ✅ Orientações e gabarito

Observação: Os módulos de 01 a 06 encontram-se na apostila “A Matemática do Ensino Fundamental 8º Ano – 1º semestre”.

(Intencionalmente deixada em branco)

Orientações ao aluno

Querido aluno, esta é a Apostila "A Matemática do Ensino Fundamental (AMEF)". Com ela, você encontrará tudo o que precisa para aprender matemática de maneira estruturada e eficiente. Cada conceito será apresentado de forma clara, com explicações, exemplos e exercícios que te ajudarão a entender e fixar o conteúdo com segurança, desenvolvendo, assim, seu intelecto e suas virtudes, de modo que encontre e defenda a **Verdade**.

Antes de iniciar seus estudos, faça sempre uma **oração**.

Sugestão:

> *"Inspirai, ó Deus, as nossas ações e ajudai-nos a realizá-las, para que em vós comece e em vós termine tudo aquilo que fizermos. Por Cristo nosso Senhor. Amém."*

Siga a ordem correta de estudos sugerida no "Livro do Professor".

Resolva os exercícios de modo claro e organizado. Isso treinará sua virtude da **ordem**. Não ignore os exercícios fáceis, pois eles irão aprimorar o seu **entendimento**. Não desista nos exercícios difíceis, pois eles irão aprimorar sua **perseverança**.

Sempre tenha **humildade** ao resolver um exercício, tanto para estar ciente de que é capaz como para reconhecer que não sabemos tudo e sempre temos algo a aprender.

Não se canse nas repetições. Todo bom atleta, para chegar ao nível de excelência, passa por muitos treinos repetitivos.

Os estudos feitos com capricho irão educar seu intelecto e sua vontade, os principais atributos de sua alma.

Tenha certeza de que ser um jovem cada vez mais inteligente te fará cada vez mais feliz.

Bons estudos!

Professor Vinícius Soares

Aquecimento

Resolva, mentalmente, a equação do 1° grau:

$$2x - 5 = x - 2$$

Um pouco de história

O costume de representar uma incógnita com a letra x pode ter surgido na Alemanha, no final do século XV. Por volta de 1470, Regiomontanus representava a incógnita por $\wp$, um sinal parecido com x cursivo. Stifel, Rudolff e outros usavam o mesmo símbolo. Alguns historiadores creem que Descartes adotou o x em suas equações na ***Géométrie*** (1637) devido a isso.

Fonte: GARBI, Gilberto Geraldo. *A rainha das ciências: Um passeio histórico pelo Maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. p. 453.

Direto ao assunto

"Deus é matemático, e as equações são as expressões mais puras da verdade" é uma frase atribuída a Albert Einstein. Inspirados por essa visão e reconhecendo a importância das equações na matemática, dedicaremos as próximas três lições a uma revisão aprofundada das principais técnicas de resolução de **equações do primeiro grau com uma incógnita**.

Princípios de equivalência

Referem-se às operações que podem ser aplicadas em ambos os lados de uma equação **sem alterar sua solução**. Eles garantem que as manipulações feitas durante a resolução preservem a igualdade entre os dois lados, sendo fundamentais para que possamos isolar a incógnita e encontrar a solução correta.

Assim como a **virtude da justiça** exige que tratemos os lados de uma disputa com imparcialidade e equilíbrio, esses princípios asseguram que ambos os lados da equação sejam tratados de forma justa, mantendo a igualdade intacta. Da mesma maneira que a justiça busca **harmonia e equilíbrio**, as equações só chegam à **verdade** quando respeitamos as operações de forma equânime, sem romper o equilíbrio entre os dois lados.

Princípio aditivo

Permite-nos somar ou subtrair o mesmo número ou expressão em ambos os membros da equação, preservando a veracidade da igualdade.

Algebricamente:

Se $a = b$, então $a + c = b + c$ ou $a - c = b - c$.

Princípio multiplicativo

Permite-nos multiplicar ou dividir ambos os membros da equação por um mesmo número ou expressão (diferente de zero), preservando a veracidade da igualdade.

Algebricamente:

Se $a = b$, então $ac = bc$ ou $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, com $c \neq 0$.

Exercícios resolvidos

01. Resolva a equação $5x - 9 = 17 + 3x$.

Aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar 9 e subtrair 3x dos dois membros, com o objetivo de isolar a incógnita no primeiro membro da igualdade.

$$5x - 9 + 9 - 3x = 17 + 3x + 9 - 3x$$

$$5x - 3x = 19 + 9$$

Simplificando os dois membros, temos:

$$2x = 28$$

Aplicando o princípio multiplicativo, vamos dividir os dois membros por 2 para finalizar a resolução da equação.

$$\frac{2x}{2} = \frac{28}{2} \Rightarrow x = 14$$

02. Determine o conjunto solução da equação $-2x - 8 + 7x = 17 + 8x - 15$, sendo $\mathrm{U} = \mathbb{R}$.

Aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar 2x e 15 e subtrair 7x e 17 dos dois membros, com o objetivo de isolar a incógnita no segundo membro da igualdade.

$$-2x - 8 + 7x + 2x + 15 - 7x - 17 = 17 + 8x - 15 + 2x + 15 - 7x - 17$$

$$-8 + 15 - 17 = 8x + 2x - 7x$$

Simplificando os dois membros, temos:

$$-10 = 3x$$

Aplicando o princípio multiplicativo, vamos dividir os dois membros por 3 para finalizar a resolução da equação.

$$\frac{-10}{3} = \frac{3x}{3} \Rightarrow -\frac{10}{3} = x$$

Pela propriedade simétrica, se $a = b \Rightarrow b = a$. Logo:

$$x = -\frac{10}{3}. \qquad \text{Portanto, } \ \mathrm{S} = \left\{-\frac{10}{3}\right\}$$

“Esta é a justiça de Deus pela fé em Jesus Cristo, para todos os fiéis (pois não há distinção; com efeito, todos pecaram e todos estão privados da glória de Deus), e são justificados gratuitamente por sua graça; tal é a obra da redenção, realizada em Jesus Cristo.”
(Romanos 3, 22-24)

Exercícios de fixação

01. Como podemos definir uma equação do primeiro grau com uma incógnita?

02. Como podemos definir conjunto universo e conjunto solução de uma equação?

03. Como podemos definir os princípios de equivalência?

04. Quais são os dois principais princípios de equivalência? Cite-os e os explique.

05. Resolva as equações abaixo, utilizando os princípios de equivalência.

a) $3x + 1 = -8$	b) $4x + 14 = 2x$

c) $5x + 9 = 13x + 8$	d) $8 - 8x = 6 + 6x$
e) $x + 9 - 7x = 7x + 9 - 15x$	f) $13 + 5x - 17 = 5x + 13 - 9x$

06. (Fundatec/2024) Sabe-se que ($2y + 35 = 44{,}6$). Assinale a assertiva que representa a metade de y.

a) 5,2 b) 9,6 c) 4,8 d) 2,4

Exercícios complementares

01. (FAUEL/2024) Um número adicionado ao seu dobro, ao seu triplo, ao seu quádruplo e ao seu quíntuplo resulta em 240. Que número é esse?

a) O número 2. b) O número 4. c) O número 8. d) O número 16.

02. (FCC/2023) Quatro barras de chocolate custam R$ 46,50 a mais do que uma barra. O preço de duas barras de chocolate é:

a) R$ 30,00 b) R$ 32,00 c) R$ 33,50 d) R$ 33,00 e) R$ 31,00

03. (Instituto Avalia/2023) Se $x + 10 = 3k$ e $k = 3$, então o valor de x é igual a:

a) 1. b) –3. c) 3. d) 2. e) –1.

04. A equação $x + 3 = 1$ tem solução sendo o conjunto universo o conjunto dos números naturais? Justifique.

05. Em uma balança em equilíbrio, há duas maçãs de mesmo peso e um peso de 2,2 kg em um dos pratos. No outro prato, há um peso de 2500 g. Qual é o peso, em gramas, de cada maçã?

06. (CETREDE/2016) O triplo de um número somado com 19 resulta em 70. Esse número é:

a) 25.   b) 30.   c) 17.   d) 20.   e) 15.

01. Um triângulo que possui os três ângulos internos agudos é classificado como:

a) equilátero
b) equiângulo
c) acutângulo
d) obtusângulo
c) escaleno

02. Assinale a alternativa que contém medidas com as quais é possível construir um triângulo.

a) 8 cm – 9 cm – 12 cm
b) 10 cm – 12 cm – 25 cm
c) 6 cm – 6 cm – 12 cm
d) 1 cm – 3 cm – 5 cm
e) 4 cm – 8 cm – 12 cm

03. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a:

a) 60°
b) 90°
c) 120°
d) 150°
e) 180°

04. Em um triângulo, dois de seus ângulos medem 70° cada. Então, a medida do terceiro ângulo interno desse triângulo:

a) será equivalente à medida do complemento de 70°.
b) será equivalente à medida do complemento de 50°.
c) será equivalente à medida do complemento de 40°.
d) será equivalente à medida do complemento de 60°.
e) será equivalente à medida do complemento de 30°.

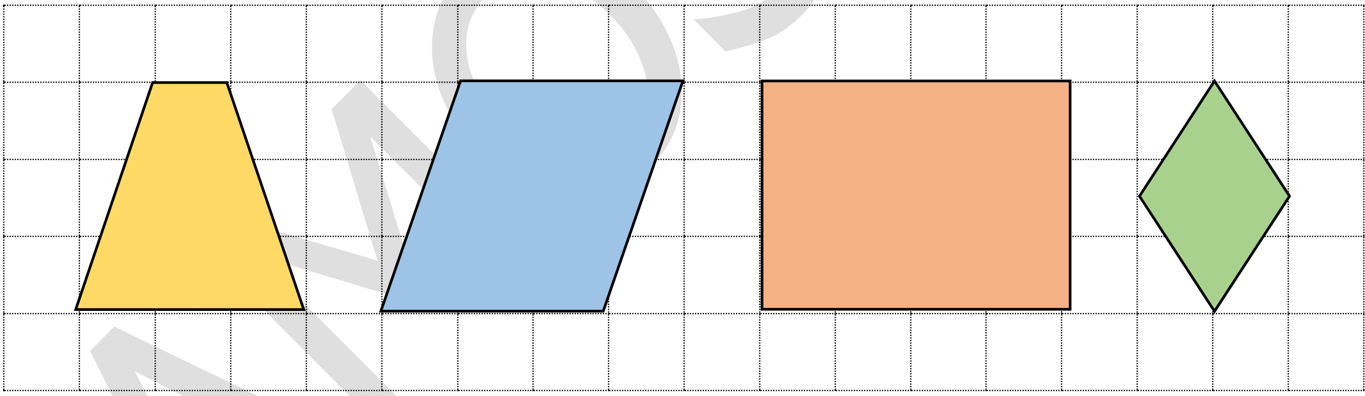
05. Um triângulo retângulo:

a) Possui apenas um ângulo reto e nunca poderá ser isósceles.
b) Possui apenas um ângulo reto e nunca poderá ser escaleno.
c) Possui apenas um ângulo reto e nunca poderá ser equilátero.
d) Possui dois ângulos retos e nunca poderá ser isósceles.
e) Possui dois ângulos retos e nunca poderá ser escaleno.

06. Em um triângulo, o segundo ângulo mede o dobro do primeiro e o terceiro ângulo mede o sêxtuplo do segundo. A medida do menor ângulo desse triângulo é igual a:

a) 20°
b) 18°
c) 16°
d) 14°
e) 12°

07. Observe os quadriláteros abaixo.



É correto afirmar que, nessa imagem, temos:

a) Um paralelogramo e três trapézios.
b) Um trapézio e três paralelogramos.
c) Dois trapézios e dois paralelogramos.
d) Quatro paralelogramos.
e) Quatro trapézios.

08. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é igual a:

a) 180°
b) 270°
c) 360°
d) 540°
e) 450°

09. Em um quadrilátero convexo, três de seus ângulos internos medem 40°, 70° e 110°. A metade da medida do quarto ângulo desse quadrilátero é igual a:

a) 140°
b) 160°
c) 80°
d) 70°
e) 150°

10. As expressões algébricas abaixo correspondem às medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.

$2x$	$2x + 24°$	$3x - 5°$	$4x$

Qual a medida do menor desses ângulos?

a) 31°
b) 62°
c) 86°
d) 88°
e) 124°

Aquecimento

01. Assinale as alternativas que representam igualdades:

a) $3x - 1 \neq 5$ b) $1 + 3 = 5 - 1$ c) $21 - 1 > 22 - 3$ d) $3 = 18 \div 6$

02. Assinale as alternativas que representam equações:

a) $x = 2 - 3$ b) $2x > 1$ c) $3 - x = x + 4$ d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Um pouco de história

O símbolo "≠" (diferente de) provavelmente começou a ser usado de maneira mais formal e difundida a partir do século XVIII, em textos matemáticos de Leonhard Euler. Já os símbolos de > (maior que) e < (menor que) foram criados por Thomas Harriot (1550 – 1617) e publicados postumamente em seu livro *Artis analyticae praxis*, de 1631. Em 1644, John Wallis usou os sinais $\overline{<}$ e $\overline{>}$ para menor ou igual e maior ou igual. Por volta de 1734, o francês Pierre Bouguer usou $\leqq$ e $\geqq$. Porém, hoje emprega-se $\geq$ e $\leq$.

Fonte: GARBI, Gilberto Geraldo. *A rainha das ciências: Um passeio histórico pelo Maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. pp. 453 e 454.

Direto ao assunto

Com absoluta certeza, concordaremos com a verdade de que $5 \neq 6$. O que talvez não percebamos é que, ao afirmar que um número é diferente de outro, um deles é maior e o outro é menor. Então, poderíamos imaginar que do símbolo ≠ derivam os símbolos > e <.

$$\boxed{5 \neq 6 \quad \Rightarrow \quad 5 < 6 \quad \text{e} \quad 6 > 5}$$

Imaginemos, agora, a seguinte afirmação:

“O salário do professor Guilherme é, no mínimo, R$ 5.000.”

Como podemos representar essa informação através de símbolos e elementos algébricos?

Resposta: Se o salário do professor Guilherme é, **no mínimo**, R$ 5.000, isso significa que seu salário é **maior ou igual** a R$ 5.000.

Designando por x o salário do professor Guilherme, em reais, temos:

$$\boxed{x \geq 5.000}$$

Imagem: freepik.com

De modo análogo, podemos representar a afirmação “O salário do professor Guilherme é, no máximo, R$ 5.000” com o símbolo $\leq$, pois, **no máximo**, significa **menor ou igual**.

$$\boxed{x \leq 5.000}$$

Assim, temos completado o quadro de sinais da desigualdade:

E podemos definir:

Uma desigualdade é toda sentença que possui o símbolo $\neq$ ou um de seus derivados $>, <, \geq$ ou $\leq$.

Exemplos:

a) $2 + 6 \neq 5 + 1$

b) $9 > 4 + 4 - 10$

c) $5 \geq 5$

d) $x \leq 10$

Uma desigualdade que possui, no mínimo, um número desconhecido, é chamada de inequação.

Exemplos:

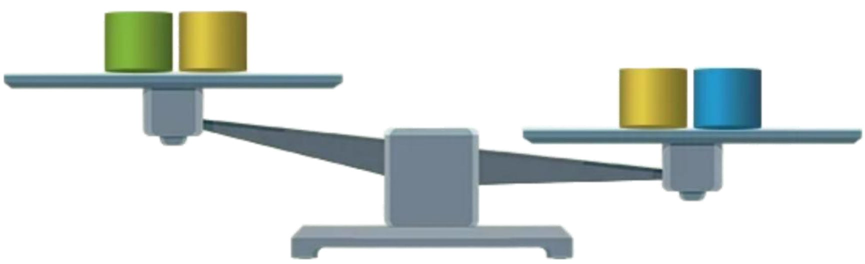
a) $5 + x > 2 \rightarrow$ Inequação do 1° grau com uma incógnita.

b) $3x + y \leq 17 \rightarrow$ Inequação do 1° grau com duas incógnitas.

c) $x^2 - 11 \geq 0 \rightarrow$ Inequação do 2° grau com uma incógnita.

d) $x^3 - 2x < 1 \rightarrow$ Inequação do 3° grau com uma incógnita

Agora responda, de acordo com a imagem:



( ) O cilindro verde é mais leve que o azul

( ) O cilindro verde é mais pesado que o azul

( ) O cilindro verde tem o mesmo peso que o azul

Exercícios resolvidos

01. Quais são os números inteiros não negativos que satisfazem a inequação $x \leq 6$?

Solução: Devemos listar todos os números inteiros não negativos que são menores ou iguais a 6.

Resposta: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

02. Qual é o maior número inteiro que satisfaz a inequação $x < 100$?

Solução: Os números inteiros que satisfazem a inequação $x < 100$, em ordem decrescente, são:

99, 98, 97, 96, 95, ...

Logo, o maior número inteiro que satisfaz a inequação $x < 100$ é o número 99.

Exercícios de fixação

01. Como podemos definir uma desigualdade?

____

____

02. Como podemos definir uma inequação?

____

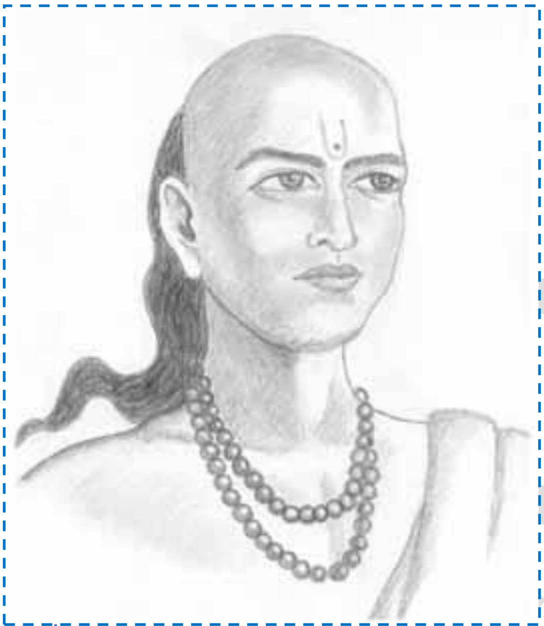
____

Aquecimento

01. Qual é o próximo número da sequência?

3 – 6 – 12 – 24 – ☐

Um pouco de história



Desenhado por Andreas Strick

As primeiras evidências de resolução de equações quadráticas remontam a civilizações antigas como a Babilônia e o Egito, há mais de 3.500 anos. Eles utilizavam métodos geométricos e tabelas para encontrar soluções.

Os gregos, especialmente Euclides (século III a.C.) e Diofante (século III d.C.), contribuíram significativamente para a álgebra, mas não desenvolveram uma fórmula geral.

Al-Khwarizmi, um matemático persa do século IX, é considerado o "pai da álgebra". Ele apresentou métodos para resolver equações quadráticas, mas sua abordagem era mais verbal do que algébrica.

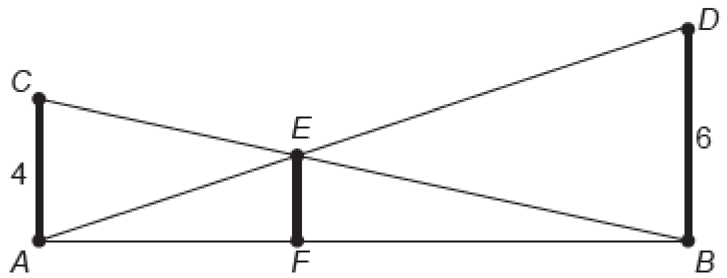
O matemático indiano **Bhaskara II** (1114 – 1185), também conhecido como Bhaskaracharya, viveu durante o período clássico da matemática indiana. Ele apresentou uma solução geral para equações quadráticas em sua obra "Bījaganita" (Álgebra). Embora não tenha sido o primeiro a encontrar uma solução para equações quadráticas, Bhaskara apresentou a fórmula de forma clara e concisa, utilizando um método que se assemelha ao que conhecemos hoje. No entanto, é importante ressaltar que a fórmula já era conhecida em outras culturas, e Bhaskara apenas a popularizou no mundo indiano. A fórmula de Bhaskara, junto com outros conhecimentos matemáticos indianos, chegou à Europa através dos árabes. Matemáticos europeus como Rafael Bombelli e François Viète contribuíram para a formalização e generalização da fórmula. Ao longo do tempo, a fórmula foi atribuída a diferentes matemáticos, e o nome de Bhaskara se tornou mais conhecido no Ocidente, principalmente no Brasil.

Direto ao assunto

Observe o exercício abaixo, retirado do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2013:

QUESTÃO 172*

O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos *AC* e *BD* e a haste é representada pelo segmento *EF*, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta *AB*. Os segmentos *AD* e *BC* representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste *EF*?

- **A** 1 m
- **B** 2 m
- **C** 2,4 m
- **D** 3 m
- **E** $2\sqrt{6}$ m

**Prova amarela*

O principal modo de resolver essa questão é através da teoria de **semelhança de triângulos**. Porém, muitos cálculos são envolvidos, o que nos leva a uma resolução muito extensa[1]. Com a mesma aplicação de semelhança de triângulos e <u>**equações literais**</u>, podemos simplificar a resolução apenas para:

$$EF = \frac{6 \times 4}{6 + 4} = \frac{24}{10} = 2,4$$

Alternativa correta: Letra C.

[1] Veja resolução completa no gabarito.

Esse simples exemplo nos mostra o poder do domínio de equações literais. Saber manipular equações que não possuem, necessariamente, números, nos leva a um entendimento mais profundo das relações entre grandezas e variáveis. Esse conhecimento é fundamental para resolver **problemas abstratos**, **modelar situações do mundo real** e **construir fórmulas gerais** que podem ser aplicadas em diversas situações práticas. Além disso, desenvolve o raciocínio lógico e a habilidade de generalizar conceitos matemáticos.

Outro exemplo é a **fórmula de Bhaskara** mencionada no tópico “Um pouco de história” do início da lição.

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demonstração da fórmula quadrática para resolução de uma equação do 2º grau com uma incógnita.

Aquecimento

Resolva, mentalmente, o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Direto ao assunto

Existem momentos na Matemática em que somos chamados a exercer não apenas a técnica, mas o **discernimento**. A análise, o julgamento, a escuta atenta das pistas que os números nos dão. A **discussão de um sistema 2 × 2** é exatamente esse momento: não basta operar — é preciso **compreender** o que está diante de nós.

Um sistema linear com duas equações e duas incógnitas pode estar dizendo muitas coisas.

Pode estar gritando uma **única solução**, pode estar sussurrando **infinitas**, ou então se calando por completo, mostrando que **nada se encaixa**.

Vamos aprender a interpretar um sistema com olhos de juiz e ouvidos de matemático:

– Quando é possível resolvê-lo?

– Quando ele está em paz consigo mesmo e tudo se encaixa?

– E quando ele entra em contradição interna e implode?

Vamos estudar **as condições para existir uma, nenhuma ou infinitas soluções**. Mais do que resolver, vamos **julgar**. Porque na Matemática, assim como na vida, nem todo par de caminhos anda junto.

Sistema possível e determinado (SPD)

Nesta lição, vamos olhar para o sistema mais comportado de todos. Aquele que não arruma confusão, não se contradiz, não esconde mistérios. Estamos falando do **sistema possível e determinado (SPD)**.

Esse é o sistema que **tem solução** — e mais: **tem uma <u>única</u> solução**. Nada de dúvidas. Nada de "talvez".

Dado um par de equações bem-comportadas e independentes, existe **um único ponto do plano** que satisfaz as duas ao mesmo tempo. Um par ordenado (x, y) que resolve a equação de cima **e** a equação de baixo.

É como dois caminhos que se cruzam **exatamente em um ponto**. Esse ponto é a solução. Ele existe. Ele é real. E é só ele.

Matematicamente, isso acontece quando as duas equações representam **retas distintas que se intersectam em um único ponto**, ou seja, **são concorrentes**.

Vamos trabalhar com exemplos, olhar para os coeficientes com atenção, e principalmente, aprender a reconhecer o SPD antes mesmo de resolver o sistema. Porque o verdadeiro matemático não age só com pressa — ele age com **clareza**.

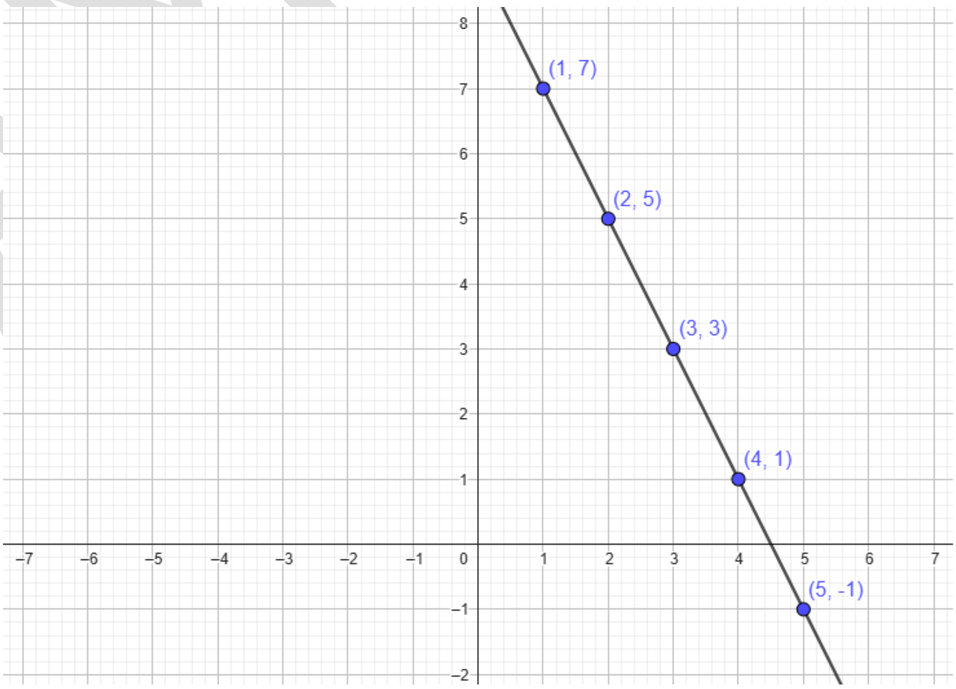
<u>**Exemplo:**</u> Considere o sistema $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - 3y = -13 \end{cases}$

Cada uma das equações desse sistema representa, no plano cartesiano, uma reta.

$$2x + y = 9$$

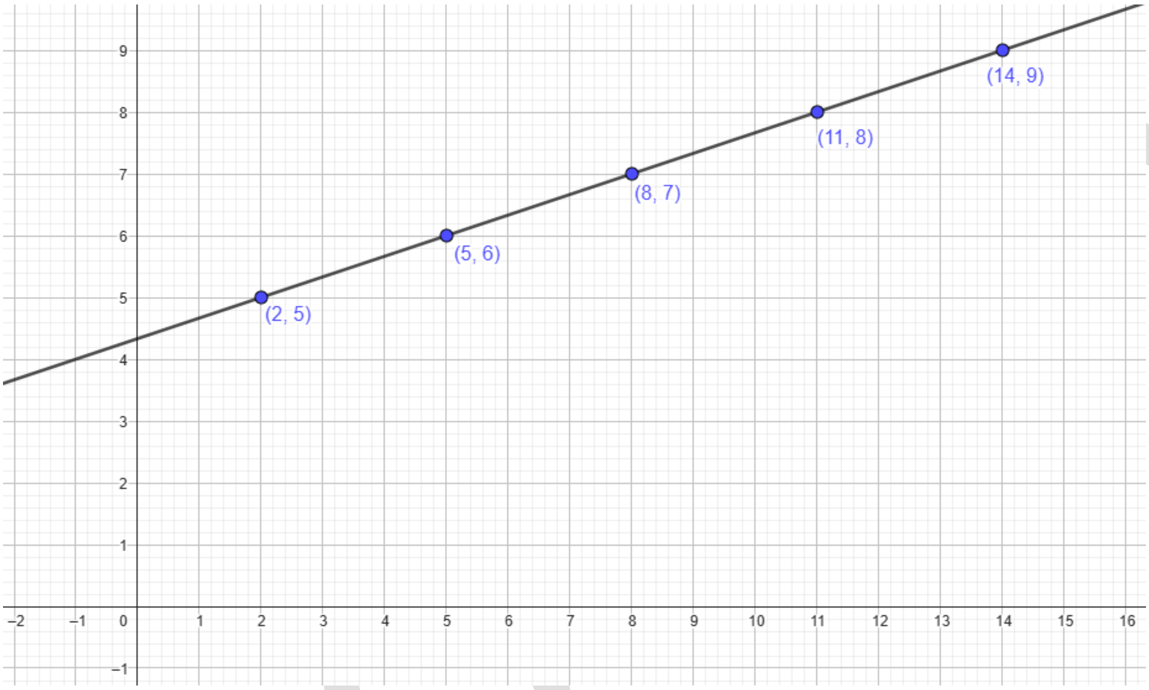
- Quando x = 1, y = 7. O ponto é (1, 7).
- Quando x = 2, y = 5. O ponto é (2, 5).
- Quando x = 3, y = 3. O ponto é (3, 3).
- Quando x = 4, y = 1. O ponto é (4, 1).
- Quando x = 5, y = −1. O ponto é (5, −1).

Vamos colocar esses pontos no plano cartesiano.

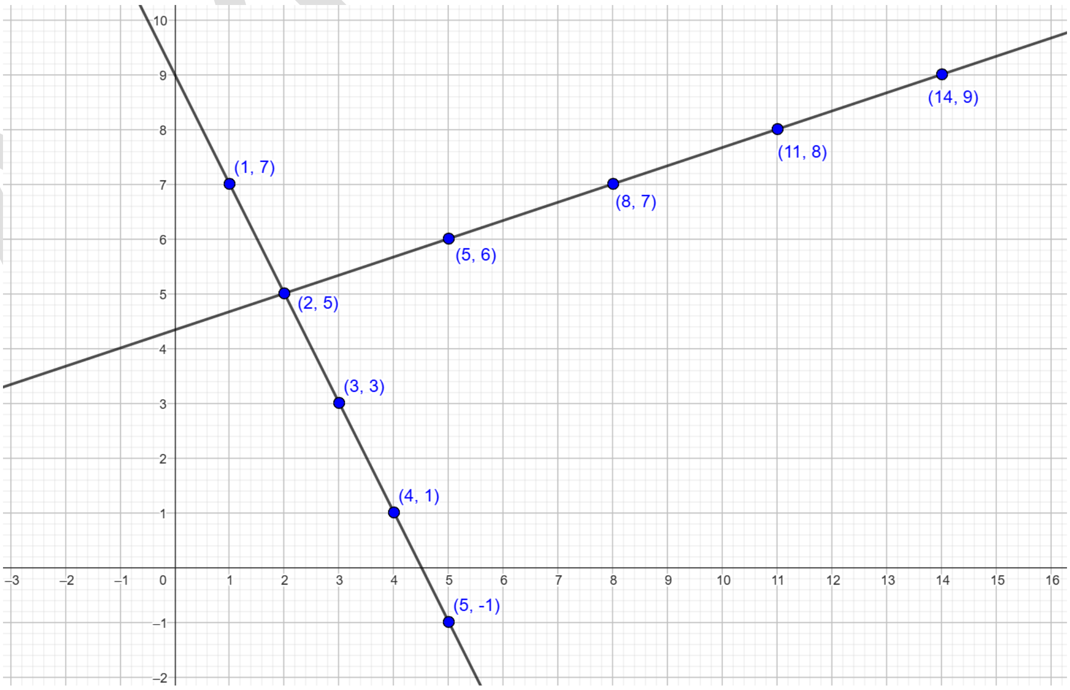


$$x - 3y = -13$$

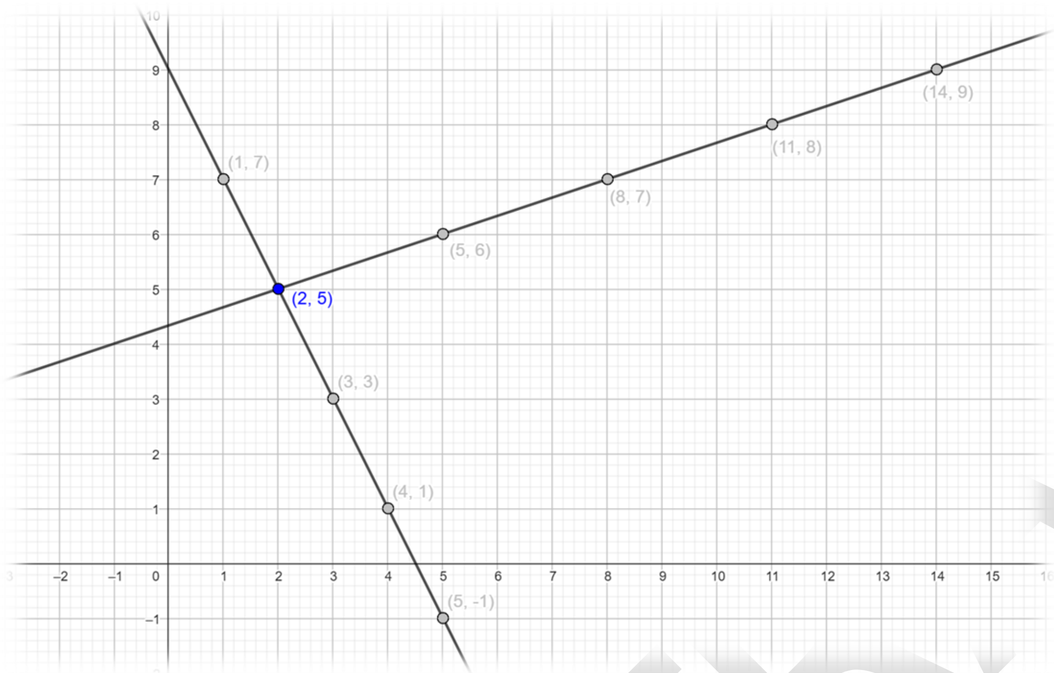
- Quando x = 2, y = 5. O ponto é (2, 5).
- Quando x = 5, y = 6. O ponto é (5, 6).
- Quando x = 8, y = 7. O ponto é (8, 7).
- Quando x = 11, y = 8. O ponto é (11, 8).
- Quando x = 14, y = 9. O ponto é (14, 9).



Dispondo as duas retas no mesmo plano cartesiano, temos:



O que você observa?



Observe que o ponto (2, 5) pertence às duas retas. Agora, observe a resolução do sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - 3y = -13 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 3 e somando com a segunda, temos:

$$\begin{cases} 6x + 3y = 27 \\ x - 3y = -13 \end{cases} \oplus$$

$$(6x + 3y) + (x - 3y) = 27 + (-13) \Rightarrow$$

$$6x + 3y + x - 3y = 27 - 13 \Rightarrow$$

$$7x = 14 \Rightarrow$$

$$x = 2$$

Substituindo $x = 2$ na primeira equação $2x + y = 9$, temos:

$$2 \cdot 2 + y = 9 \Rightarrow$$

$$4 + y = 9 \Rightarrow$$

$$y = 5$$

<u>Solução:</u> (2, 5)

Note que a solução **foi exatamente igual ao ponto em comum às duas retas**. Isso acontece porque o ponto (2, 5) está **simultaneamente sobre as duas retas** representadas por essas equações. Em linguagem geométrica, isso significa que **as duas retas se cruzam nesse exato ponto**. E só nesse.

E por que **só nesse**? Porque as equações representam **duas retas distintas**, que **não são paralelas** e **não coincidem**. Quando isso acontece, a **interseção ocorre em um único ponto**. Esse é um exemplo de Sistema Possível e Determinado (SPD).

"Sistema", porque envolve mais de uma equação.
"Possível", porque **tem solução**.
"Determinado", porque **a solução é única**.

A geometria confirma o que a álgebra calculou: duas retas se cruzando em exatamente um ponto. **Esse ponto é a solução**. Nenhum outro ponto no plano resolve as duas equações ao mesmo tempo.

Para saber se um sistema é SPD antes de resolvê-lo, é preciso analisar **<u>a razão entre seus coeficientes dependentes</u>**, ou seja, os coeficientes que acompanham as incógnitas.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Em todo sistema SPD, temos:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$

<u>Exemplo:</u> O sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ é SPD, pois:

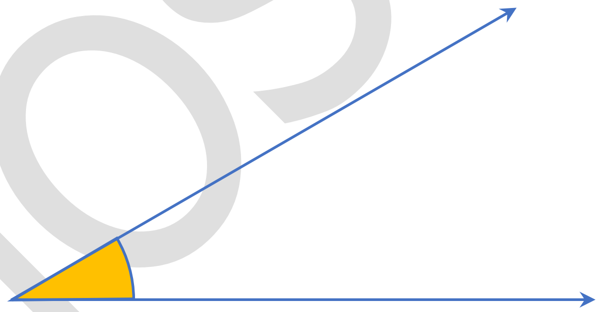
$$\frac{2}{3} \neq \frac{3}{5}$$

Aquecimento

01. Como podemos definir um ângulo?

02. O que são ângulos congruentes?

03. Utilizando um transferidor, determine a medida do ângulo abaixo.



04. Qual o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?

05. Explique o que é um ângulo agudo, reto, obtuso e raso.

Direto ao assunto

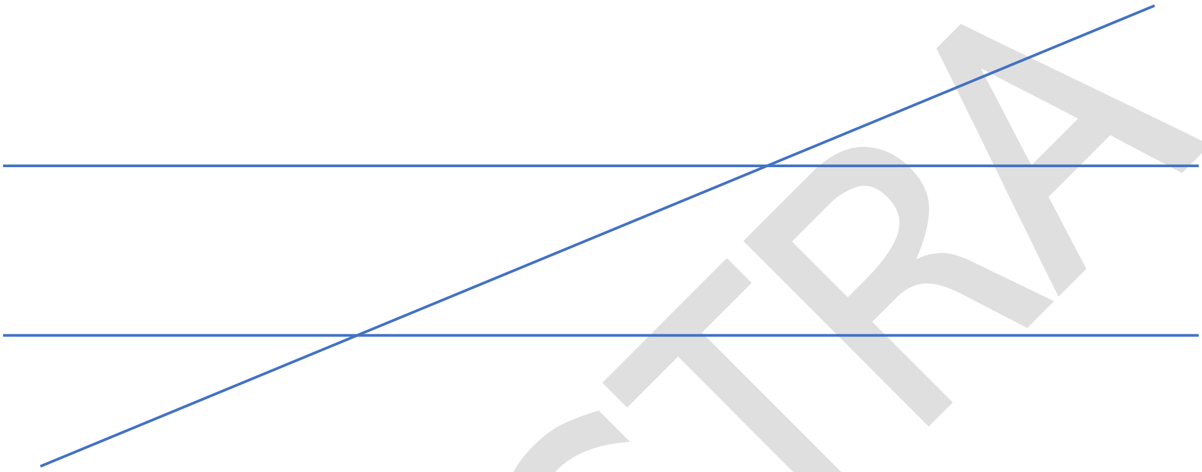
Na maioria das cidades, basta levantar os olhos para perceber uma teia de fios estendida entre postes — são os cabos de energia elétrica, geralmente expostos ao longo das ruas. Essa é a forma mais comum de distribuição de eletricidade no Brasil e em muitos outros países. Esses fios, quase sempre esticados em **linhas retas e paralelas**, formam um verdadeiro desenho geométrico no céu urbano.

Mas você já parou para pensar nos ângulos que surgem quando uma nova fiação cruza essas linhas paralelas, como quando um fio diagonal liga dois postes de lados opostos da rua? Ou como os engenheiros sabem onde e como esticar esses cabos com precisão? Ao observar essas situações, entramos em um campo fascinante da geometria: **as retas paralelas cortadas por uma transversal**.

Neste estudo, vamos entender como esse conceito se aplica tanto nas ruas da cidade quanto nos cadernos de matemática — revelando padrões, ângulos congruentes, e propriedades que tornam nossa análise do espaço mais precisa e interessante.

Paralelas cortadas por uma transversal

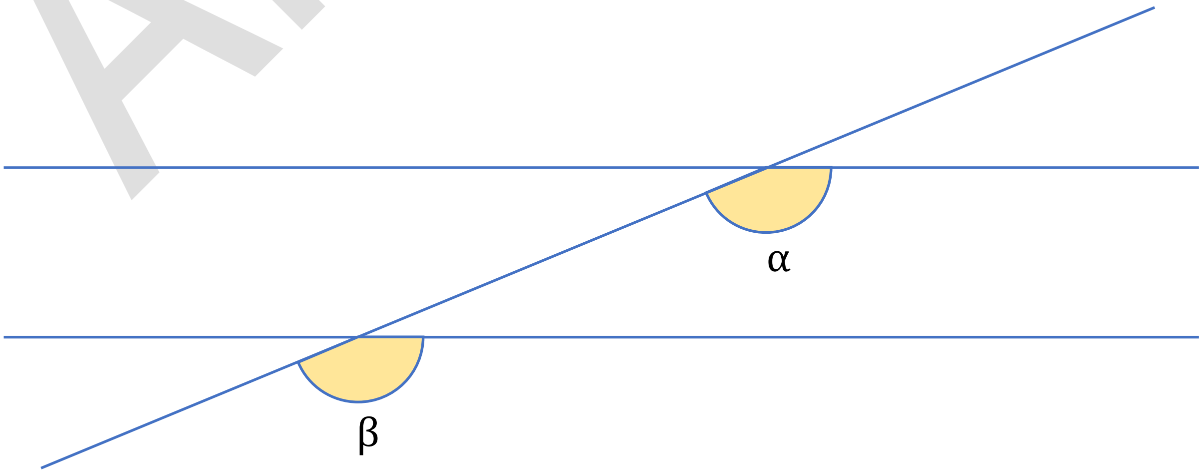
Quando duas ou mais retas paralelas são cortadas por outra, essa reta recebe o nome de **transversal**. A transversal é responsável por formar diversos ângulos ao cruzar as paralelas — e a análise desses ângulos revela propriedades geométricas importantes e recorrentes na matemática.



Ângulos correspondentes

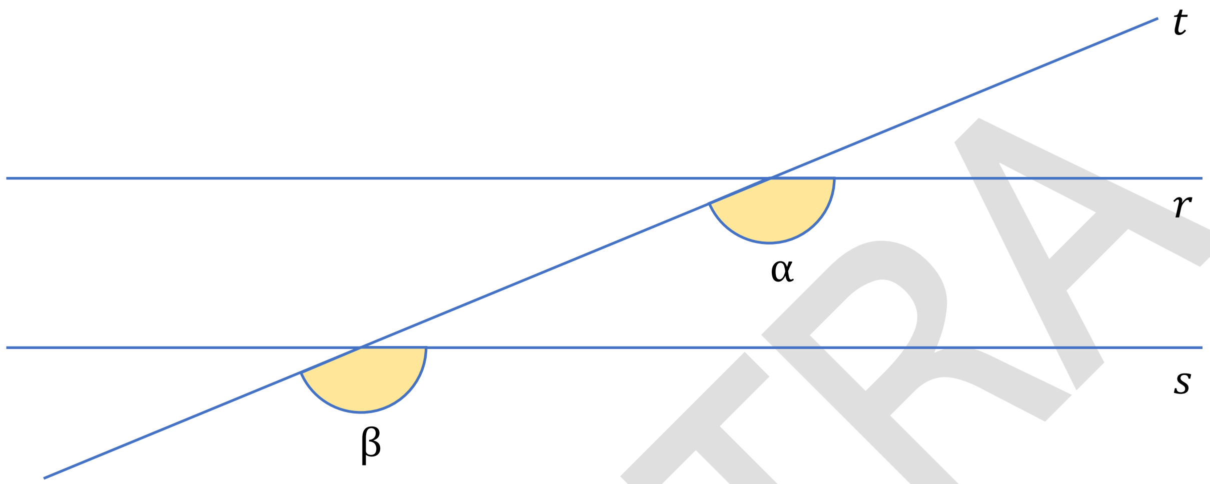
Quando temos um conjunto de duas retas paralelas cortadas por uma transversal, os ângulos que ocupam posições equivalentes em relação às paralelas e à transversal são chamados de **ângulos correspondentes**.

Exemplo: Os ângulos de medida α e β abaixo são correspondentes, pois ambos estão abaixo das paralelas e à direita da transversal.

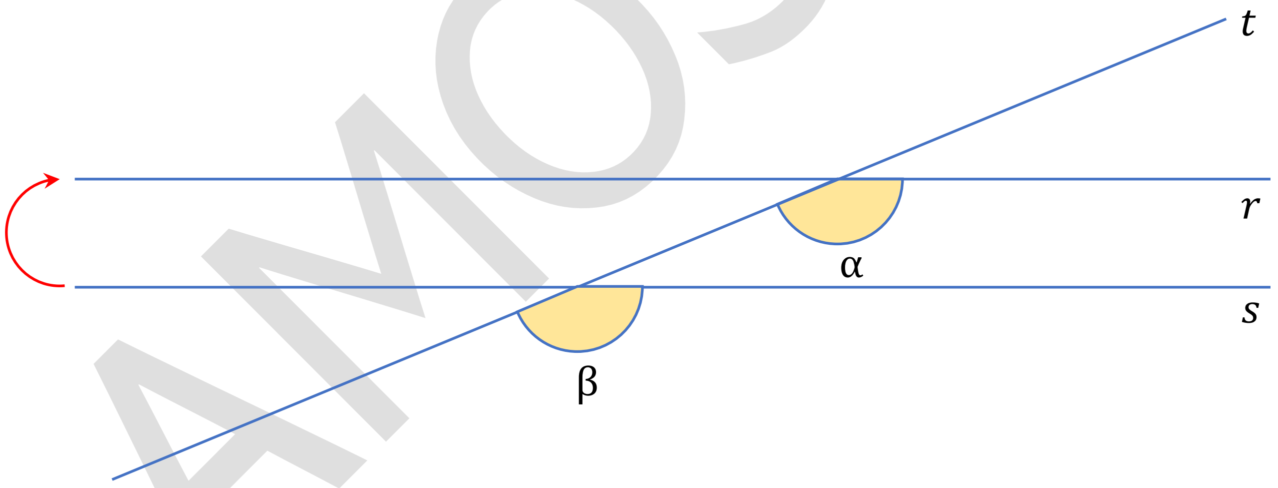


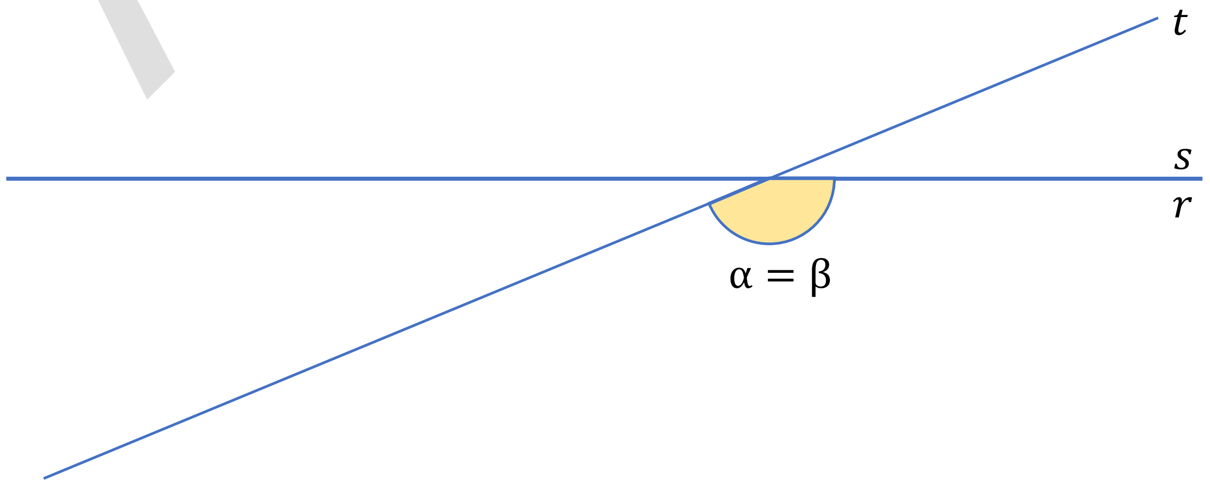
Propriedade dos ângulos correspondentes

Considere as retas paralelas r e s abaixo e a transversal t, formando os ângulos correspondentes α e β.



Imagine que a reta s suba lentamente até coincidir com a reta r.





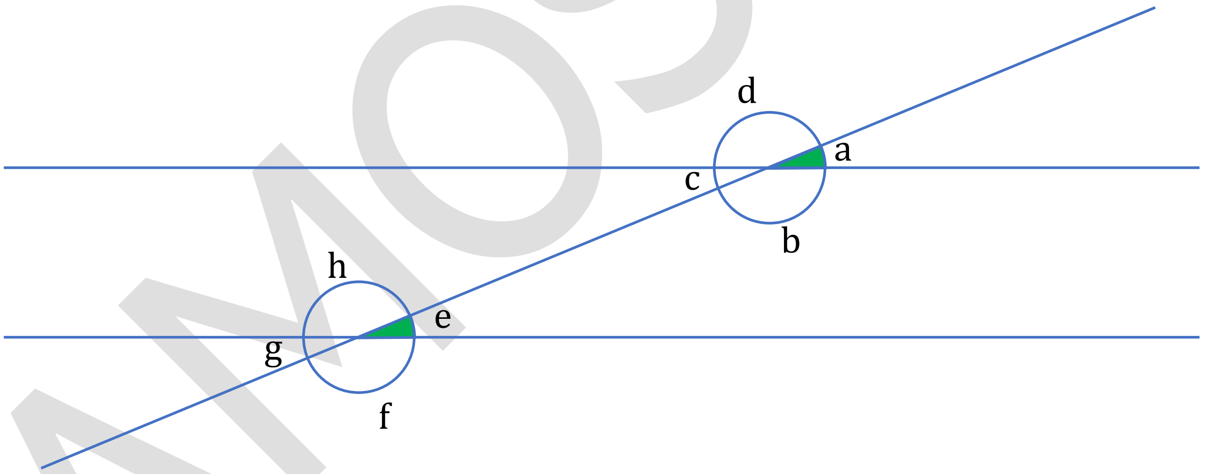
Nesse movimento, percebemos que os ângulos α e β passam a ocupar exatamente a mesma posição. Por isso, têm a mesma medida — são congruentes.

Ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal são **congruentes**.

Mas atenção: essa propriedade só é válida se as retas cortadas pela transversal forem paralelas.

Exercícios de fixação

01. Na figura abaixo, temos um conjunto de retas paralelas cortadas por uma transversal. Existem quatro pares de ângulos correspondentes. Identifique esses pares e pinte cada um com a mesma cor. O primeiro par foi resolvido como exemplo.



Pares de ângulos correspondentes: (a, e)

Aquecimento

01. Calcule, mentalmente, a solução do sistema.

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 70 \end{cases}$$

Solução: ____

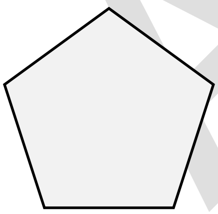
02. Calcule, mentalmente, a solução do sistema.

$$\begin{cases} x = 2y + 3 \\ x = y + 4 \end{cases}$$

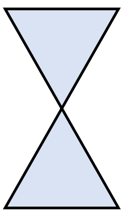
Solução: ____

Direto ao assunto

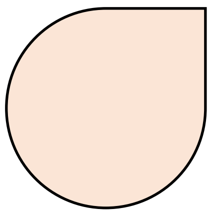
Um **polígono** é uma linha plana bidimensional, fechada e simples[1], formada somente por segmentos de reta.



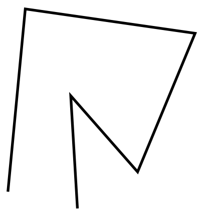
Polígono



Não é polígono



Não é polígono

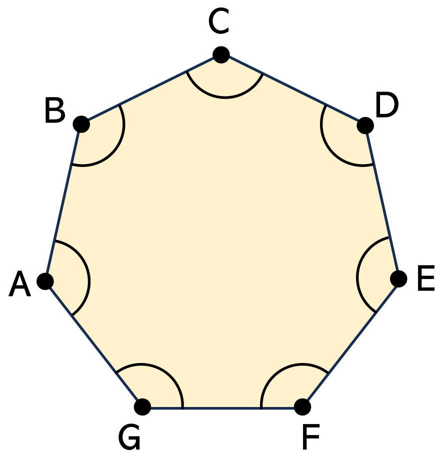


Não é polígono

Polígono vem do grego. "Poly" = vários; "Gonía" = ângulos.

[1] Sem cruzamentos entre os segmentos

Elementos de um polígono



<u>Vértices:</u> Pontos de encontro de dois segmentos de reta consecutivos.

No nosso exemplo, temos os vértices:

$$A, B, C, D, E, F \text{ e } G.$$

<u>Lados:</u> Segmentos de reta formados por dois vértices consecutivos.

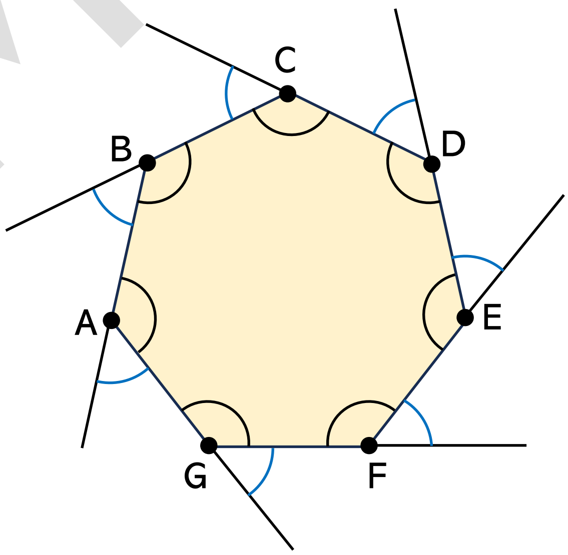
No nosso exemplo, temos os lados:

$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FG} \text{ e } \overline{AG}.$$

<u>Ângulos internos:</u> Ângulos da região interna do polígono. No nosso exemplo acima, temos os ângulos internos:

$$B\hat{A}G, A\hat{B}C, B\hat{C}D, C\hat{D}E, D\hat{E}F, E\hat{F}G \text{ e } A\hat{G}F.$$

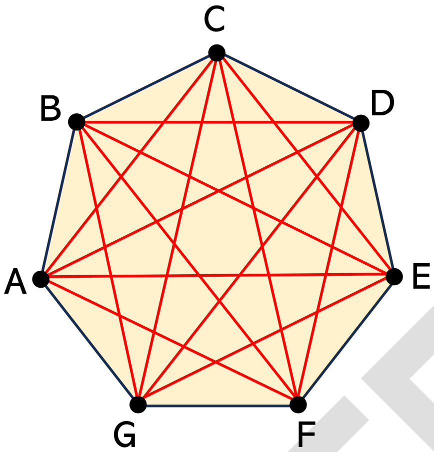
<u>Ângulos externos:</u> Ângulos da região externa do polígono. É dado pelo suplemento de um ângulo interno, através do prolongamento de um de seus lados.



Um ângulo interno e seu ângulo externo correspondente são **suplementares**.

<u>Diagonais:</u> Segmentos de reta formados por dois vértices não consecutivos. No nosso exemplo, temos:

$$\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{BF}, \overline{BG}, \overline{CE}, \overline{CF}, \overline{CG}, \overline{DF}, \overline{DG} \text{ e } \overline{EG}.$$



<u>Polígono regular e irregular</u>

Um **<u>polígono regular</u>** tem todos os ângulos congruentes e todos os lados congruentes. Em qualquer outro caso, ele será **<u>irregular</u>**.

Uma placa de "PARE" é um exemplo de polígono regular.

Aquecimento

01. Quantas diagonais partem de cada vértice de um hexadecágono? __________

02. O que é semiperímetro?

____

03. Calcule o semiperímetro de um quadrilátero cujos lados medem 27 cm, 38 cm, 56 e 43 cm.

Direto ao assunto

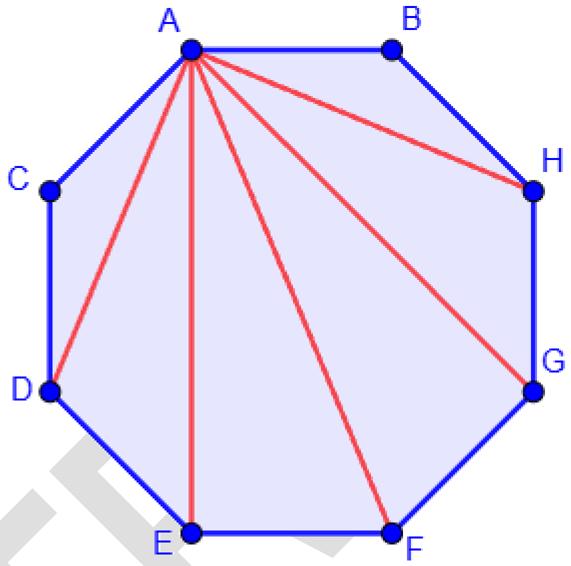
Contar as diagonais de um polígono com 5, 6 ou 7 lados é fácil. Basta ir desenhando uma por uma, com paciência. Mas... e se o polígono tiver 10 lados? Ou 20? Cedo ou tarde iremos perceber que o risco é grande: ou perdemos a conta, ou acabamos contando a mesma diagonal duas vezes.

Na lição anterior, descobrimos quantas diagonais partem de um único vértice de um polígono. Isso foi um passo importante. Com essa informação, parece tentador pensar: "É só multiplicar pelo número total de vértices, e pronto!" Mas... será mesmo que isso funciona? Ou será que estamos, de novo, correndo o risco de contar diagonais repetidas?

Nesta nova lição, vamos desenvolver uma técnica segura, rápida e geral para descobrir o número total de diagonais de **qualquer polígono**.

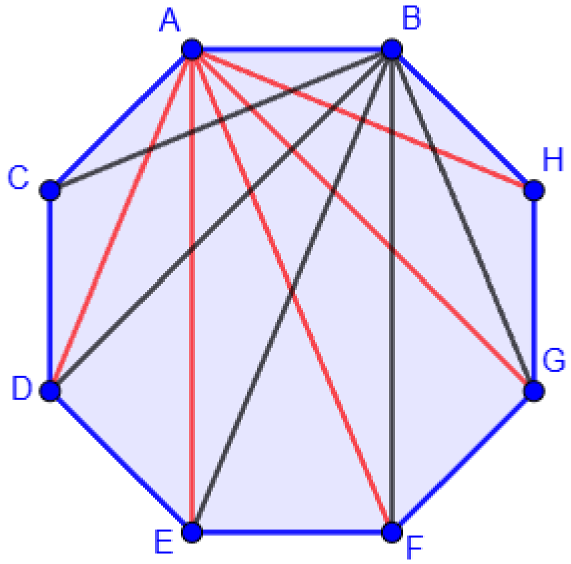
Quantidade de diagonais de um polígono[2]

Tomemos o octógono como exemplo. Quantas diagonais partem de cada um de seus vértices?

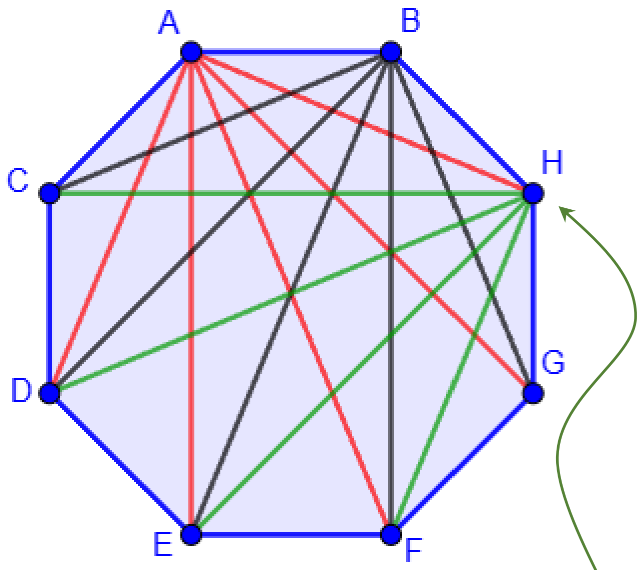


Já sabemos que são **8 – 3 = 5** diagonais.

Como o octógono possui 8 vértices e de cada vértice partem 5 diagonais, será que podemos concluir que o total de diagonais do octógono é 40? Vejamos:



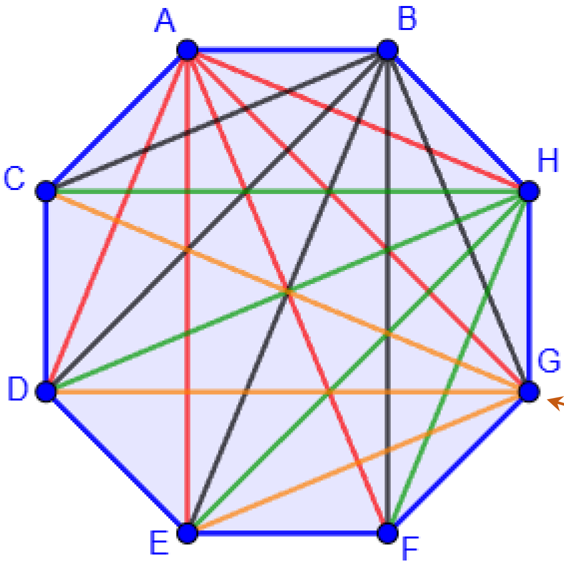
10 diagonais



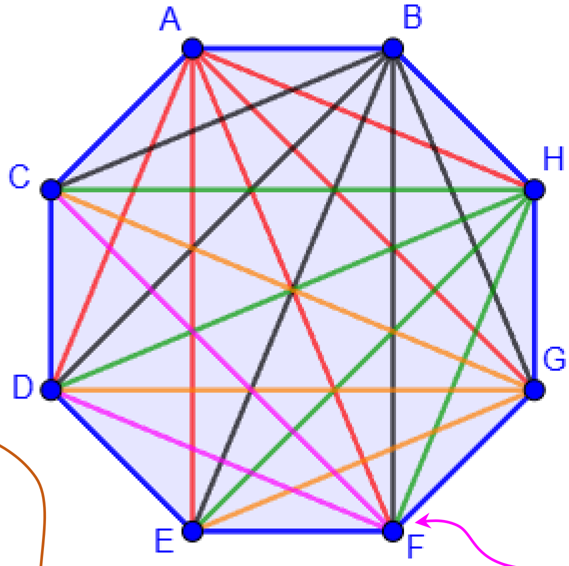
14 diagonais

Perceba que dos vértices A e B partem 5 diagonais cada e, no total, temos 10 diagonais. Porém, ao traçarmos as diagonais do vértice H, temos apenas **4 novas diagonais**. A diagonal $\overline{HA}$ já havia sido contada no vértice A.

[2] Toda a teoria de diagonais será relacionada apenas a polígonos **convexos**.

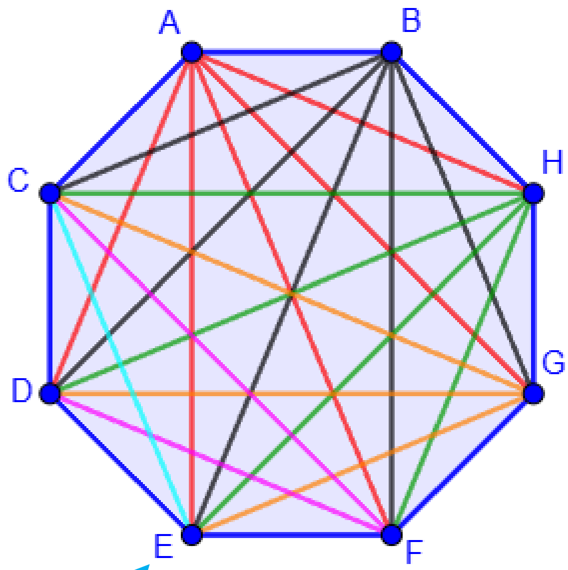


17 diagonais



19 diagonais

Olhando para o vértice G, percebemos apenas 3 novas diagonais. As diagonais $\overline{GA}$ e $\overline{GB}$ já haviam sido contadas nos vértices A e B, respectivamente. No vértice F, percebemos apenas 2 novas diagonais. As diagonais $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ e $\overline{FH}$ já haviam sido contadas nos vértices A, B e H, respectivamente.



20 diagonais

Olhando para o vértice E, percebemos apenas 1 nova diagonal. As diagonais $\overline{EA}$, $\overline{EB}$, $\overline{EH}$ e $\overline{EG}$ já haviam sido contadas nos vértices A, B, H e G, respectivamente.

Percebam que, embora de cada vértice de um octógono partam 5 diagonais, o total de diagonais não é $8 \times 5 = 40$. Essa conta nos leva a um número maior do que o real. Na verdade, o octógono possui apenas 20 diagonais.

Mas por que isso acontece?

Simples: ao multiplicarmos 8×5, estamos contando cada diagonal duas vezes — uma vez a partir de cada extremidade. Por exemplo, a diagonal que liga o vértice A ao vértice D está sendo contada tanto quando partimos de A quanto quando partimos de D. Por isso, o resultado de 40 precisa ser dividido por 2.

Curiosamente, essa contagem "dupla" é justamente o que torna o processo mais simples: basta **calcular o total de diagonais que partem de cada vértice**, multiplicar **pelo número de vértices** e, ao final, **dividir tudo por 2**. Assim, evitamos desenhar uma a uma — mesmo em polígonos com muitos lados.

Exemplo: Pentadecágono

1) Total de diagonais que partem de cada vértice:

$$d_V = n - 3$$

$$d_V = 15 - 3$$

$$d_V = 12$$

2) Total de vértices: 15

3) Contagem dupla:

$$15 \times 12 = 180 \text{ diagonais.}$$

4) Contagem correta:

$$180 \div 2 = 90 \text{ diagonais.}$$

Exemplo: Icoságono

1) Total de diagonais que partem de cada vértice:

$$d_V = n - 3$$

$$d_V = 20 - 3$$

$$d_V = 17$$

2) Total de vértices: 20

3) Contagem dupla:

$$20 \times 17 = 340 \text{ diagonais.}$$

4) Contagem correta:

$$340 \div 2 = 170 \text{ diagonais.}$$

Generalizando, temos:

Para um polígono convexo de n lados, $n \geq 3$, temos:

1) Total de diagonais que partem de cada vértice:

$$d_V = n - 3$$

2) Total de vértices: n

3) Contagem dupla:

$$n \cdot (n - 3)$$

4) Contagem correta:

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Sendo d o total de diagonais de um polígono convexo, concluímos:

$$\boxed{d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}}$$

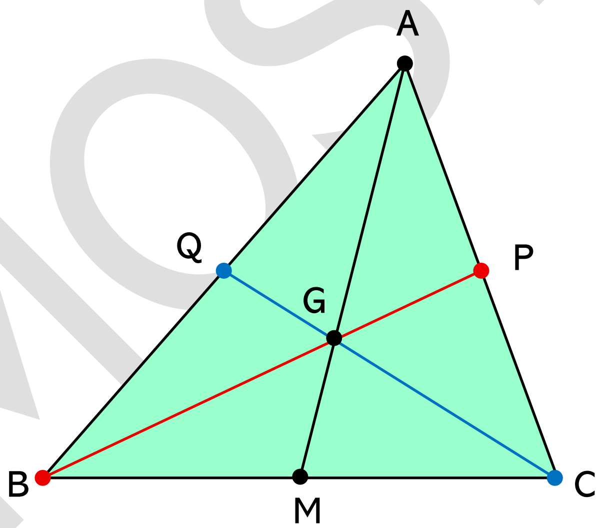
Para entender informalmente a demonstração dessa propriedade, imagine que a **mediana** é como uma régua ligando um vértice até o "meio" do lado oposto. O **baricentro** funciona como o ponto de equilíbrio do triângulo, como se fosse o local onde poderíamos apoiar o triângulo em um dedo sem deixá-lo cair.

Agora pense assim: o baricentro **fica mais perto do lado oposto** do que do vértice. Isso acontece porque ele precisa equilibrar não só a distância, mas também o "peso" do triângulo. Para manter o equilíbrio, o ponto precisa estar **duas vezes mais próximo do lado oposto** do que do vértice.

Por isso, ele **divide a mediana em duas partes**, sendo que a parte que vai do vértice até o baricentro é **o dobro da parte que vai do baricentro até o lado oposto**. Ou seja, a divisão é na razão **2 para 1**.

<u>**Exemplo:**</u> No triângulo ABC abaixo

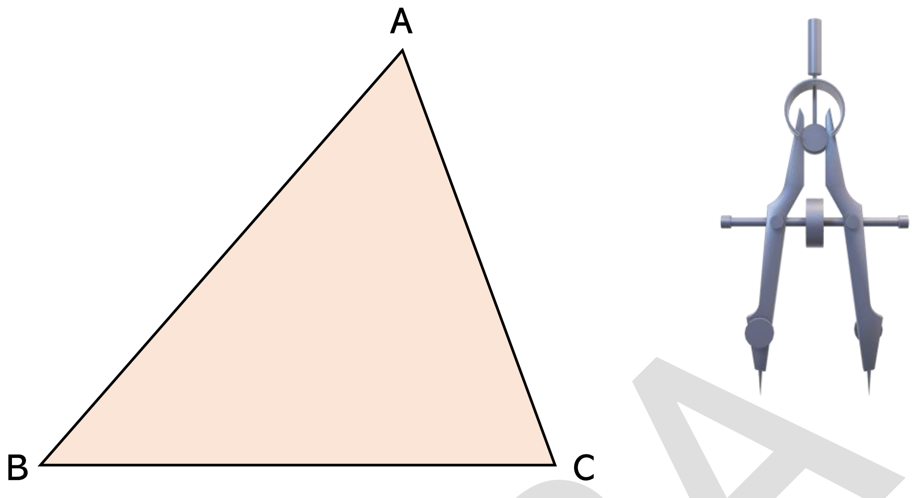
– A medida de $\overline{\mathrm{AG}}$ é o dobro da medida de $\overline{\mathrm{GM}}$;
– A medida de $\overline{\mathrm{BG}}$ é o dobro da medida de $\overline{\mathrm{GP}}$;
– A medida de $\overline{\mathrm{CG}}$ é o dobro da medida de $\overline{\mathrm{GQ}}$.



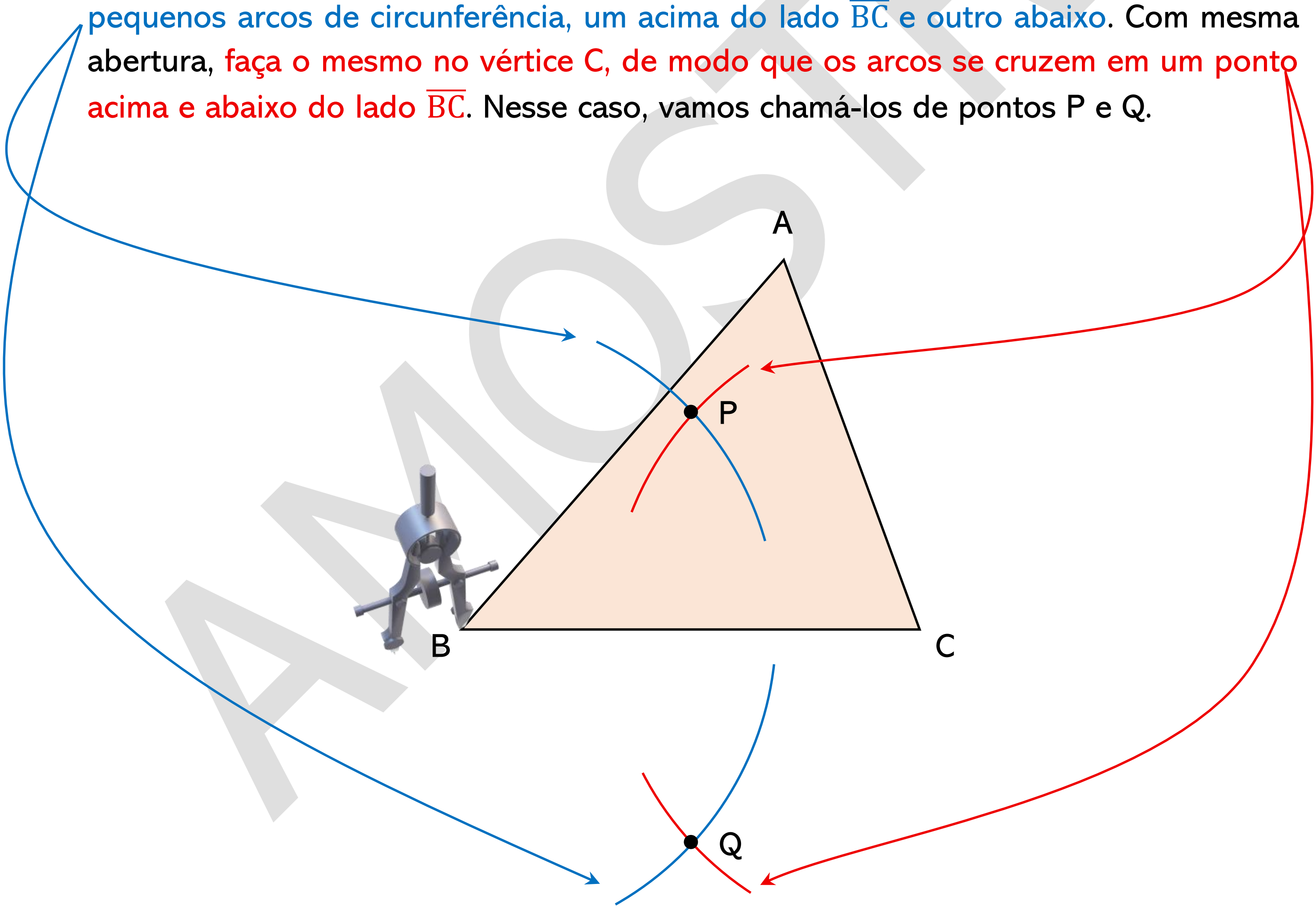
<u>**Régua e compasso**</u>

Com o mesmo propósito de construir a altura e de modo similar, vamos construir a mediana relativa ao lado $\overline{\mathrm{BC}}$ do triângulo ABC abaixo.

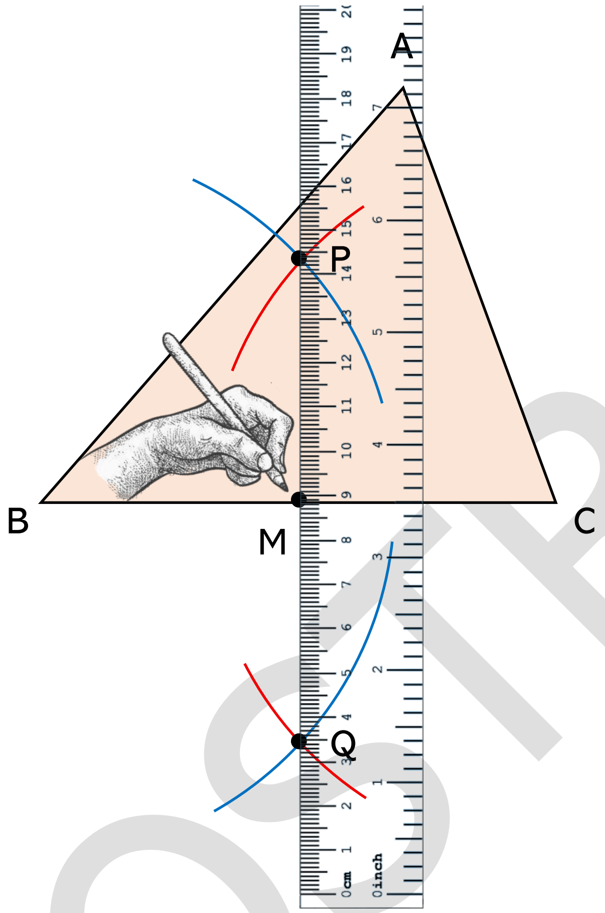
<u>**1° passo:**</u> Abra o compasso com uma abertura maior que a metade do lado $\overline{\mathrm{BC}}$.



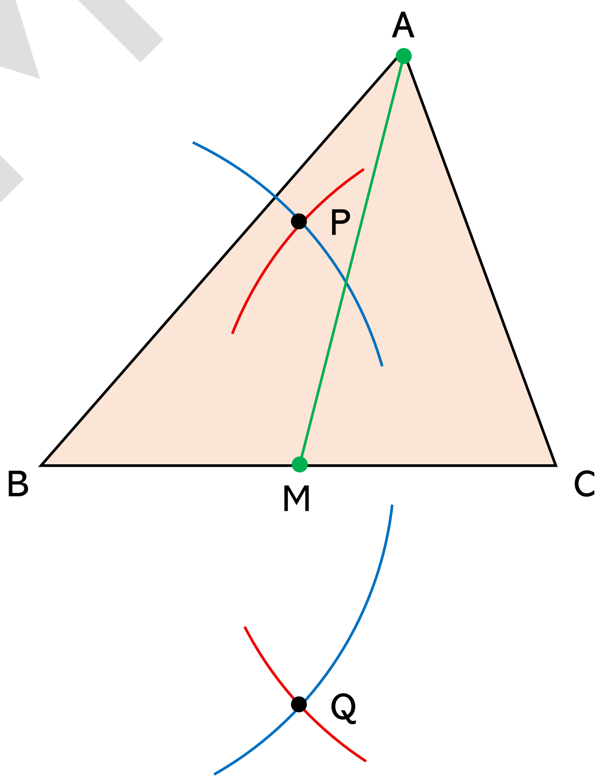
<u>2º passo:</u> Com o centro (ponta seca) do compasso no vértice B, trace dois pequenos arcos de circunferência, um acima do lado $\overline{BC}$ e outro abaixo. Com mesma abertura, faça o mesmo no vértice C, de modo que os arcos se cruzem em um ponto acima e abaixo do lado $\overline{BC}$. Nesse caso, vamos chamá-los de pontos P e Q.



3º passo: Utilizando uma régua, marque o ponto M de interseção entre a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ e o lado $\overline{BC}$. O ponto M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.



4º passo: Ainda utilizando a régua, trace o segmento $\overline{AM}$. O segmento $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.



Aquecimento

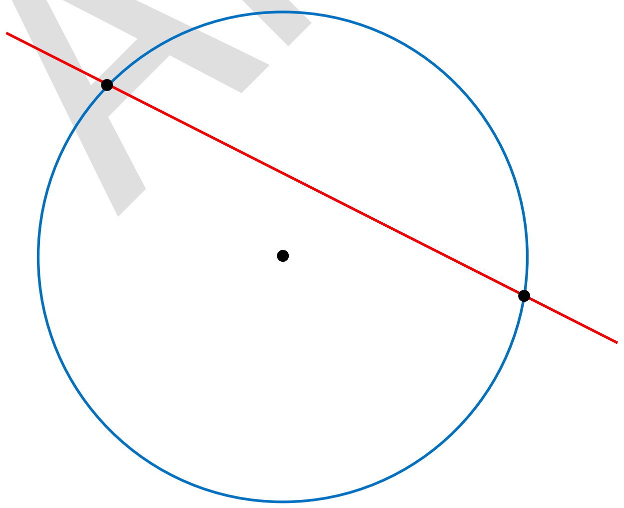
01. Calcule a área de um círculo cujo diâmetro mede 8 cm.

Direto ao assunto

Vamos estudar, nessa lição, as diferentes posições que uma reta pode ter em relação a uma circunferência.

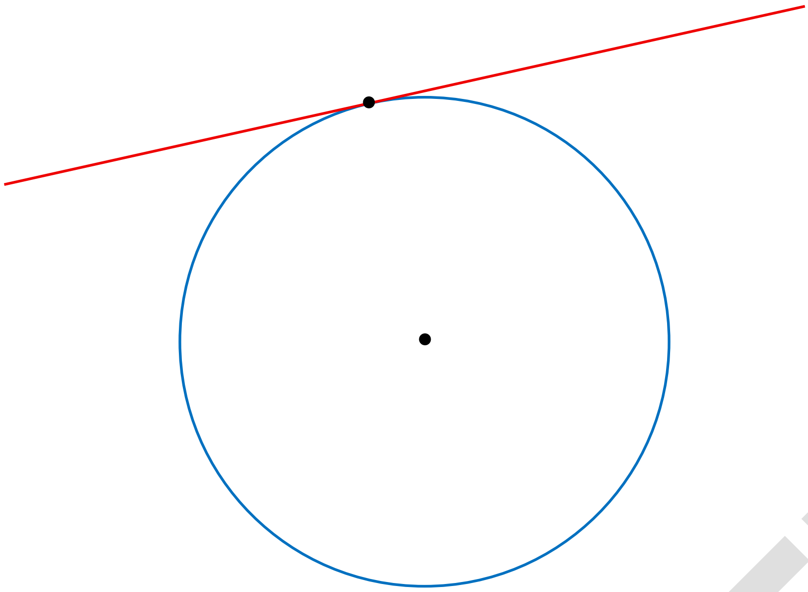
Uma reta, em relação a uma circunferência, pode ser:

1) **Secante:** quando corta a circunferência em dois pontos distintos.



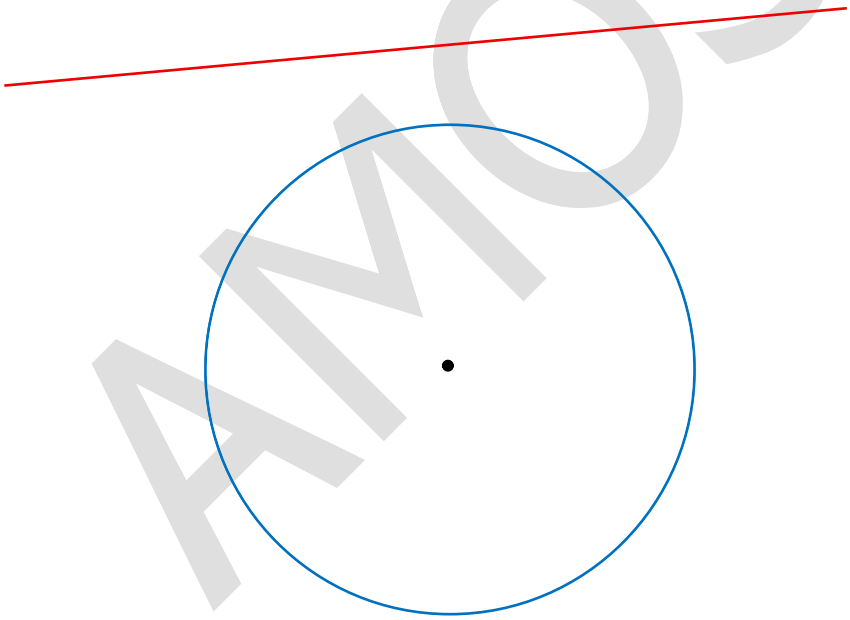
A forma geométrica do termo —**reta que corta uma curva em dois pontos** — provém do latim ***secans***, particípio presente do verbo ***secare***, que significa **"cortar"**.

2) **<u>Tangente:</u>** quando toca a circunferência em apenas um ponto.



A palavra **"tangente"** vem do latim *tangens*, que significa **"o que toca"**, particípio presente do verbo **tangere**, que quer dizer **"tocar".**

3) **<u>Externa:</u>** quando não possui nenhum ponto em comum com a circunferência.

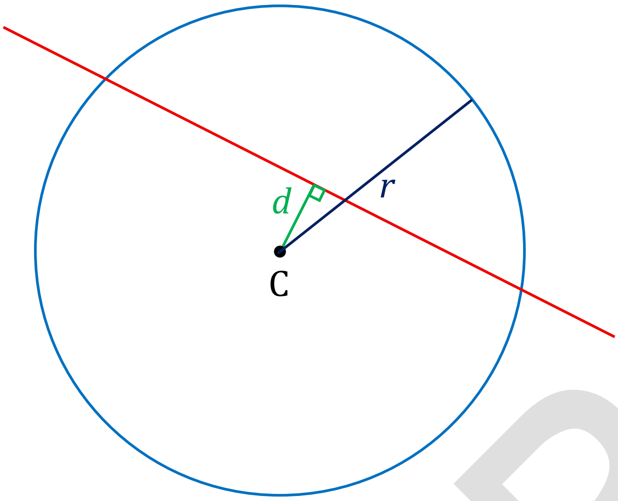


A palavra **"externa"** vem do latim *externus*, que significa "de fora, situado no exterior, estrangeiro". O radical é *ex-* (para fora) + *ternus* (sufixo relacionado a "lado" ou "direção"). Assim, *externus* literalmente queria dizer "o que está de fora" ou "o que pertence ao exterior".

Embora seja fácil identificar pela figura a posição de uma reta em relação a uma circunferência, é importante conhecer também as propriedades que distinguem cada caso de forma abstrata, sem depender de desenhos.

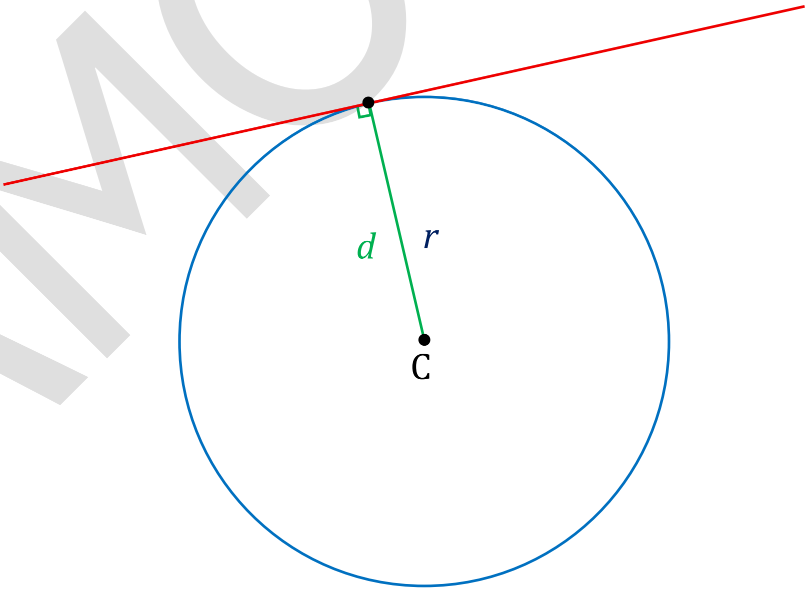
Essas posições podem ser determinadas comparando o **raio da circunferência** (r) com a **distância entre o centro da circunferência e a reta** (d):

Secante – a distância do centro à reta é **menor que o raio**.



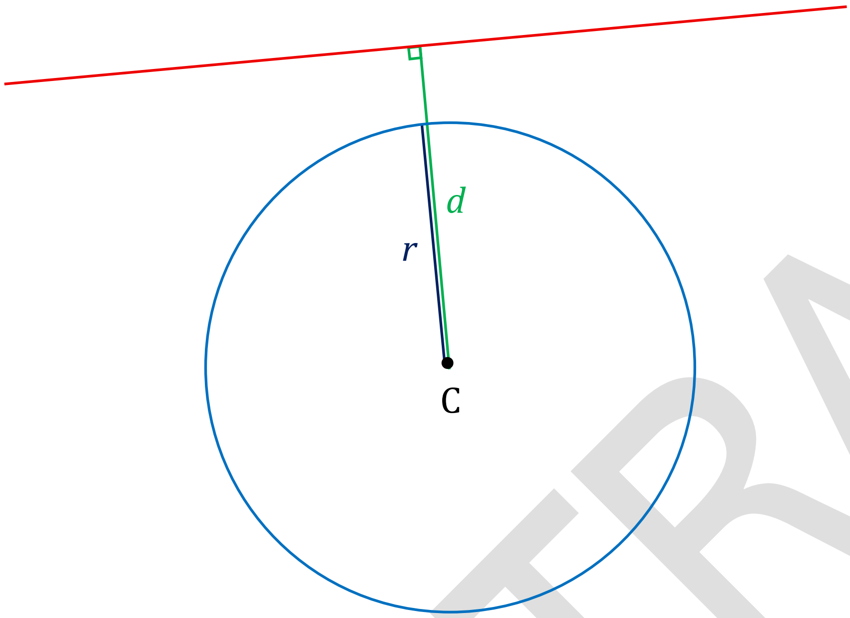
$$d < r$$

Tangente – a distância do centro à reta é **igual ao raio**.



$$d = r$$

Externa – a distância do centro à reta é **maior que o raio**.



$$d > r$$

1ª propriedade da reta tangente

O raio é sempre perpendicular à reta tangente no ponto de tangência.