Prof. Vinicius Soares

A Matemática do Ensino Fundamental

Apostila do 6º Ano

Primeiro Semestre

Prof. Vinícius Soares

A Matemática Do Ensino Fundamental

Apostila do 6° Ano

Primeiro Semestre

Este livro pertence a:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

S237m

Santos, Vinícius Soares dos.
A Matemática do Ensino Fundamental: 6º Ano / Vinícius Soares dos Santos; ilustrador Marco Túlio Araújo Silva Lôbo. – Goiânia, GO: Ed. do Autor, 2023.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-5872-405-6

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Lôbo, Marco Túlio Araújo Silva. II. Título.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Conteúdo

Módulo 01 – Sistemas de numeração e operações

1. Sistema de numeração egípcio e maia
2. Sistema de numeração romano
3. Sistema de numeração indo-arábico
4. Os números naturais
5. Adição
6. Subtração
7. Tabuada
8. Multiplicação
9. Multiplicação mental
10. Tabuada de divisão
11. Divisão 12. Divisão mental
13. Resolvendo problemas
14. Potenciação
15. Números Quadrados Perfeitos
16. Raiz Quadrada
17. Expressões Numéricas

Módulo 02 – Múltiplos e divisores

1. Divisores de um número natural
2. Múltiplos de um número natural
3. Números primos
4. Critérios de divisibilidade
5. Decomposição em fatores primos
6. Mínimo múltiplo comum
7. Máximo divisor comum
8. Propriedades do mmc e do mdc
9. Quantidade de divisores e raiz quadrada por fatoração.

Módulo 03 – Geometria: conceitos iniciais

1. Ponto, reta e plano
2. Reta, posições, semirreta e segmento
3. Ângulo: definição, medida e classificação

Módulo 04 – Polígonos

1. Definição de poligonal e polígonos
2. Triângulos e suas classificações
3. Quadriláteros e suas classificações

Módulo 05 – Frações e operações

1. Definição e leitura de frações
2. Fração de um todo e problemas
3. Classificação de frações
4. Fração Mista
5. Frações Equivalentes
6. Simplificação de frações
7. Redução de frações ao mesmo denominador
8. Comparação de frações
9. Adição e Subtração de Frações
10. Multiplicação de frações
11. Simplificação de multiplicação de frações
12. Divisão de frações
13. Potenciação de frações
14. Raiz quadrada de frações
15. Expressões numéricas com frações
16. Problemas de frações e operações

- ✅ Revisões semanais;
- ✅ Leituras complementares baseadas no livro "O Homem que Calculava";
- ✅ Exercícios complementares;
- ✅ Exercícios de vestibulares, concursos e olimpíadas;
- ✅ Avaliação por módulo;
- ✅ Orientações e gabarito.

Orientações ao aluno

Querido aluno, esta é a Apostila "A Matemática do Ensino Fundamental (AMEF)". Com ela, você encontrará tudo o que precisa para aprender matemática de maneira estruturada e eficiente. Cada conceito será apresentado de forma clara, com explicações, exemplos e exercícios que te ajudarão a entender e fixar o conteúdo com segurança, desenvolvendo, assim, seu intelecto e suas virtudes, de modo que encontre e defenda a **Verdade**.

Antes de iniciar seus estudos, faça sempre uma oração.

Sugestão:

"Inspirai, ó Deus, as nossas ações e ajudai-nos a realizá-las, para que em vós comece e em vós termine tudo aquilo que fizermos. Por Cristo nosso Senhor. Amém."

Siga a ordem correta de estudos sugerida no "Livro do Professor".

Resolva os exercícios de modo claro e organizado. Isso treinará sua virtude da **ordem**. Não ignore os exercícios fáceis, pois eles irão aprimorar o seu **entendimento**. Não desista nos exercícios difíceis, pois eles irão aprimorar sua **perseverança**.

Sempre tenha **humildade** ao resolver um exercício. Ela nos deixa cientes de que somos capazes, mas também nos mostra que naturalmente não sabemos tudo e sempre temos algo a aprender.

Não se canse nas repetições. Todo bom atleta, para chegar ao nível de excelência, passa por muitos treinos repetitivos.

Os estudos feitos com capricho irão educar seu intelecto e sua vontade – os principais atributos de sua alma.

Tenha a certeza de que ser um jovem cada vez mais inteligente te fará cada vez mais feliz.

Bons estudos!

Professor Vinícius Soares

Módulo 01

Aula 01 – Sistema de numeração egípcio e maia

Aquecimento

01. Escreva, utilizando algarismos, o número correspondente a:

Doze bilhões e setenta: ____

02. Faça a composição do número formado por:

15 centenas, 24 dezenas e 75 unidades: ______________________________

Direto ao assunto

Nesta lição, vamos **revisar os principais motivos** para estudar sistemas de numeração antigos e relembrar o **sistema de numeração egípcio**. Em seguida, conheceremos o **sistema de numeração maia** e, por fim, veremos **como esses sistemas se relacionam com o nosso**.

Por que estudar sistemas de numeração antigos?

1) **Reforço** – Quanto mais estudamos um tema, mais sólido ele fica na memória.

2) **História e gratidão** – Reconhecemos a sabedoria de povos antigos que criaram formas de contar com poucos recursos.

3) **Comparação** – Outros sistemas nos ajudam a entender melhor o nosso (indo-arábico).

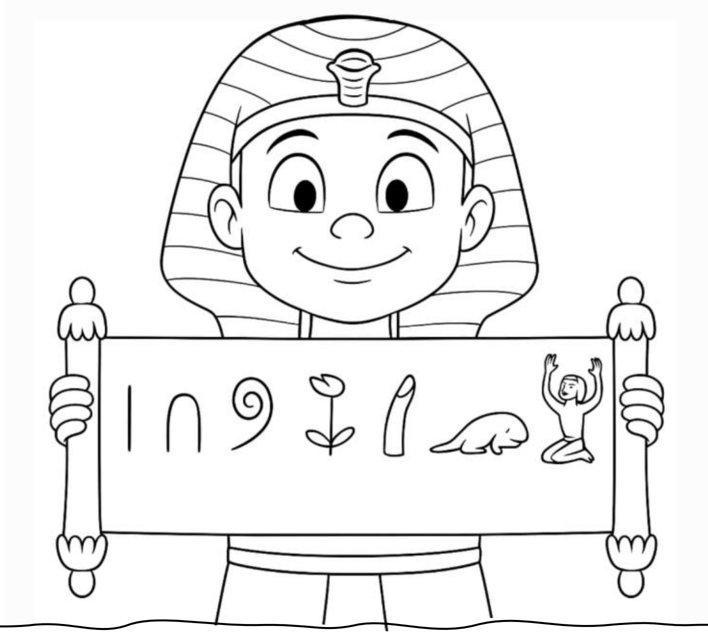
4) **Melhoria** – Ao conhecer diferentes ideias, podemos até pensar em aperfeiçoar nosso próprio sistema.

Características de um bom sistema de numeração

- **Organização:** elementos bem-dispostos facilitam a contagem.
- **Agrupamento (base):** formar grupos sempre com a mesma quantidade.
- **Simplificação dos grupos:** em vez de repetir o desenho de cada elemento, usa-se um único símbolo que represente o grupo.
- **Grupo de grupos:** quando a quantidade cresce, criam-se novos símbolos para conjuntos ainda maiores.

Sistema de numeração egípcio

O sistema de numeração egípcio é datado de cerca de 3000 anos a.C. e seu agrupamento era feito de 10 em 10, ou seja, **era um sistema de numeração decimal**.



- A haste vertical representa uma unidade;
- A letra U invertida representa 10 unidades;
- A corda enrolada representa 100 unidades;
- A flor de lótus representa 1000 unidades;
- O dedo levemente dobrado representa 10.000 unidades.
- O girino representa 100.000 unidades;
- O egípcio ajoelhado representa 1.000.000 de unidades.

10 | se tornam um ∩

10 ∩ se tornam uma 

10  se tornam uma 

10  se tornam um 

10  se tornam um 

10  se tornam um 

O sistema de numeração egípcio é **<u>aditivo</u>**, ou seja, para determinar uma quantidade, soma-se os valores individuais de cada símbolo.

<u>Exemplo:</u> O número:

 representa o número 1000 + 100 + 100 + 10 + 1 + 1 + 1 = 1213.

O sistema de numeração egípcio era **<u>não posicional</u>**, ou seja, a ordem dos símbolos não alterava o número.

O sistema de numeração egípcio, portanto, se destaca:

1) Pelo uso de **símbolos hieroglíficos**;
2) Por ser um sistema **aditivo**;
3) Por ser um sistema **não posicional** e
4) Por ser um sistema de **base 10**.

É um sistema prático para o registro de pequenas quantidades, porém trabalhoso para valores maiores.

<u>Sistema de numeração maia</u>

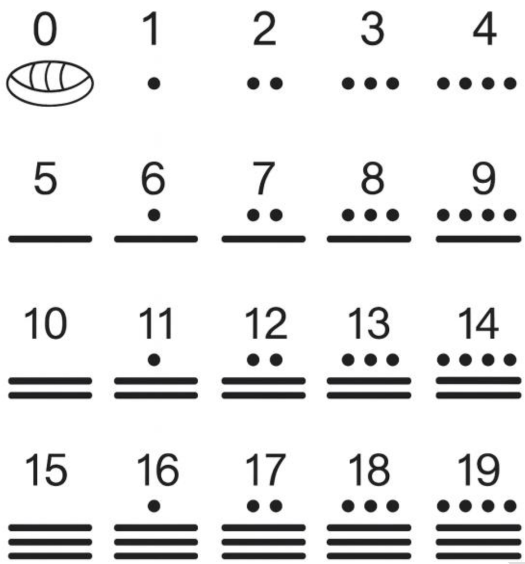
Os **maias**, povo que floresceu na Mesoamérica (atual sul do México, Guatemala, Belize e Honduras), viveram aproximadamente entre 2000 a.C. e 1500 d.C., com o Período Clássico — época de maior desenvolvimento cultural — situado entre 250 e 900 d.C. Foi justamente nesse período que eles aperfeiçoaram o seu sistema de numeração, um dos mais avançados da Antiguidade.

Esse sistema era **vigesimal**, isto é, organizado em **base 20**. Não é difícil perceber de onde pode ter surgido essa ideia: assim como muitos povos começaram a contar usando os dez dedos das mãos (base 10), os maias provavelmente pensaram no corpo inteiro, mãos e pés, totalizando vinte dedos.

Podemos imaginar que, para eles, a base 5 — correspondente aos dedos de uma só mão — funcionava como uma "parada intermediária": contar de cinco em cinco era um passo natural antes de chegar à contagem completa das mãos e dos pés.

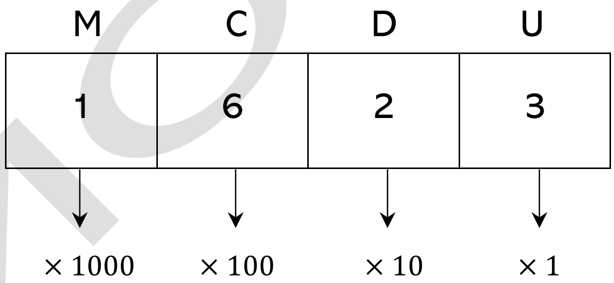
Com esse raciocínio, os maias criaram um **sistema posicional**, com símbolos simples (ponto, barra e concha para o zero) que lhes permitia registrar desde cálculos do dia a dia até complexos calendários astronômicos — uma verdadeira prova de engenhosidade matemática para sua época.

Assim, temos os números até o dezenove escritos da seguinte forma:

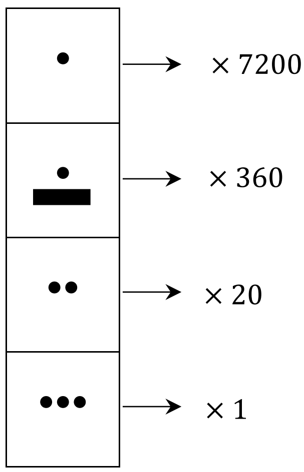


A partir do **20**, os maias utilizavam um **sistema posicional** tal como o nosso sistema: os <u>mesmos símbolos</u> mudavam de valor conforme a <u>posição</u> em que eram colocados. A diferença é que, enquanto no nosso sistema as posições são dispostas **na horizontal**, no sistema maia o posicionamento era feito **na vertical**.

<u>Sistema de numeração decimal (indo-arábico):</u>



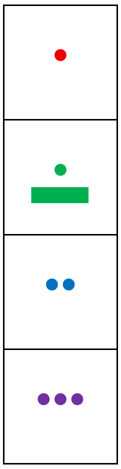
Sistema de numeração maia:



Assim, o nosso número:

$$1\ 6\ 2\ 3 = 1 \times 1000 + 6 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1$$

No sistema de numeração maia fica sendo:



$$= 1 \times 7200 + 6 \times 360 + 2 \times 20 + 3 \times 1$$

Por **curiosidade**, esse mesmo número no nosso sistema de numeração equivale a 9.403.

No entanto, nosso objetivo **não é aprender a escrever ou converter números maias para o sistema decimal**, mas perceber a genialidade dos maias: ao criarem um **sistema posicional**, eliminaram a necessidade de inventar novos símbolos para números cada vez maiores, uma fraqueza, por exemplo, do sistema egípcio. Essa ideia — de que **a posição altera o valor** — é justamente a mesma que tornou o nosso sistema decimal tão eficiente e que permanece como base da matemática até hoje.

O sistema de numeração maia, portanto, se destaca:

1) Pelo uso de **apenas três símbolos**;
2) Por ser um sistema **multiplicativo**;
3) Por ser um sistema **posicional** e
4) Por ser um sistema de **base 20** como a principal e **base 5** como auxiliar.

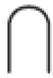
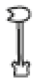
Como esses sistemas de numeração se comunicam com o nosso?

Nosso sistema combina duas heranças: dos **egípcios**, a base 10; e dos **maias**, a característica posicional e multiplicativa. Juntas, essas ideias tornaram possível **escrever e operar** números grandes de modo magnificamente simples e eficiente.

Fica, portanto, a seguinte pergunta: será possível, em algum momento, conceber um sistema de numeração mais eficiente do que este que utilizamos hoje?

Exercícios de fixação

01. Escreva por extenso quais números os símbolos egípcios abaixo representam:

02. Escreva, utilizando nossos algarismos, os números representados pelos símbolos maias abaixo:

03. Quais as quatro principais características de um bom sistema de numeração?

____

____

____

04. Quais as principais características do sistema de numeração egípcio?

____

____

____

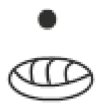
05. Quais as principais características do sistema de numeração maia?

____

____

____

06. Complete a tabela abaixo, utilizando o sistema de numeração maia:

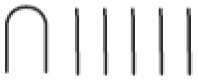
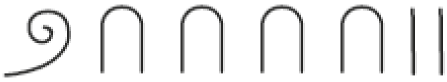
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
									

07. Explique por que o número 20 é escrito da forma  .

____

____

08. Escreva os números egípcios utilizando o sistema indo-arábico e represente os números indo-arábicos com símbolos egípcios.

	
	27
	
	213
	
	2061

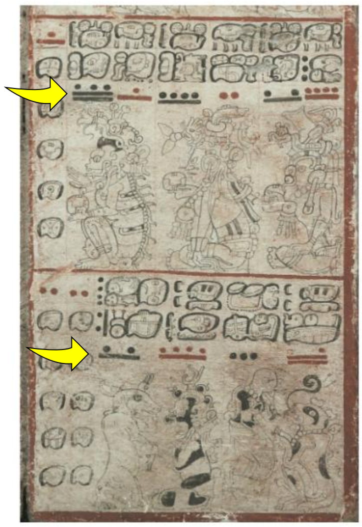
09. O sistema de numeração maia é um sistema de numeração cuja base principal é:

a) 10
b) 20
c) 5
d) 60

Exercícios complementares

01. O **Códice de Dresden** é um dos quatro manuscritos maias que existem hoje no mundo. Ele se encontra na Biblioteca Estadual da Saxônia da Universidade Técnica de Dresden, em Dresden, na Alemanha. Veja uma imagem ao lado de uma das páginas desse manuscrito.

Quais números identificamos na imagem, nas linhas indicadas pelas setas amarelas?


Codex Dresdensis, p. 13 (trecho)

Sequência de seis números:

Sequência de quatro números:

02. A fotografia a seguir é de parte de uma parede do templo de Karnak, no Egito. Observando-a, complete a tabela abaixo com os números correspondentes, utilizando o nosso sistema de numeração.

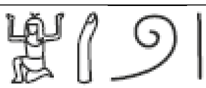
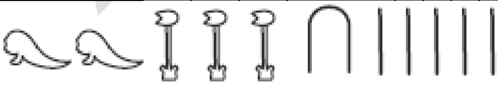
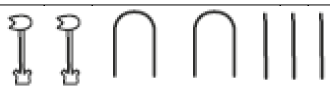
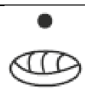
03. A pirâmide de Quéops é constituída por **2 300 000 blocos** de pedra que pesam cerca de **2500 a 60 000 quilos** cada. O trabalho de construção teria durado **20 anos** e contou com a força de **100 mil homens**.

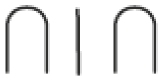
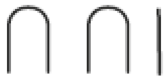
Fonte: https://www.todamateria.com.br/as-piramides-do-egito/ (adaptado)

Escreva os números em negrito, utilizando o sistema de numeração egípcia.

2 300 000	
2500	
60 000	
20	
100 000	

04. Ligue os números que representam quantidades iguais com uma reta:

	• 19
	• 1 010 101
	• 15
	• 20
	• 203 015
	• 2023

05. Os números  e  representam números iguais ou diferentes? Justifique.

____

____

____

____

06. O sistema de numeração maia é **vigesimal**, ou seja, tem base 20: **cada ordem vale 20 vezes a ordem imediatamente inferior**. Entretanto, na terceira ordem ocorre uma quebra do padrão.

Ao invés dos valores posicionais seguirem a sequência:

5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
160 000 (20 × 20 × 20 × 20)	8000 (20 × 20 × 20)	400 (20 × 20)	20	1

Os maias usavam:

5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
144 000 (20 × 18 × 20 × 20)	7200 (20 × 18 × 20)	360 (20 × 18)	20	1

Pesquise e explique por que a <u>**terceira ordem**</u> vale 20 × 18 em vez de 20 × 20.

____

____

____

____

____

____

Números maiores que 3999

Para escrever números romanos superiores a 3999, utiliza-se uma técnica que consiste em traçar uma barra horizontal sobre o símbolo romano, **de modo a multiplicar o seu valor por 1000**.

Exemplos:

a) $\overline{\mathrm{IV}} = 4 \times 1000 = 4000$

b) $\overline{\mathrm{V}} = 5 \times 1000 = 5000$

c) $\overline{\mathrm{VI}} = 6 \times 1000 = 6000$

d) $\overline{\mathrm{X}} = 10 \times 1000 = 10.000$

e) $\overline{\mathrm{C}} = 100 \times 1000 = 100.000$

f) $\overline{\mathrm{M}} = 1000 \times 1000 = 1.000.000$

Exercícios resolvidos

01. Escreva com algarismos romanos os números abaixo:

a) 4795

b) 23.146

c) 2.154.894

Solução:

a) $4895 = 4000 + 800 + 90 + 5 = \overline{\mathrm{IV}}\mathrm{DCCCXCV}$

b) $23.156 = 20.000 + 3000 + 100 + 50 + 6 = \overline{\mathrm{XX}}\mathrm{MMMCLVI}$

c) $1.320.517 = 1.320.000 + 500 + 10 + 7 = \overline{\mathrm{MCCCXX}}\mathrm{DXVII}$

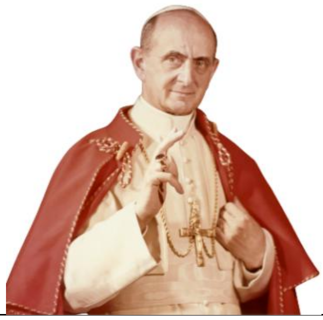
02. Escreva o número $\overline{\mathrm{MCCCXXIV}}\mathrm{CXXVI}$ utilizando o nosso sistema de numeração.

Solução: $\overline{\mathrm{MCCCXXIV}}\mathrm{CXXVI}$

$$1324 \times 1000 + 100 + 20 + 6 = 1.324.000 + 100 + 20 + 6 = 1.324.126$$

Exercícios complementares

01. Complete, por extenso, como se lê o nome de cada um dos papas da Igreja Católica:

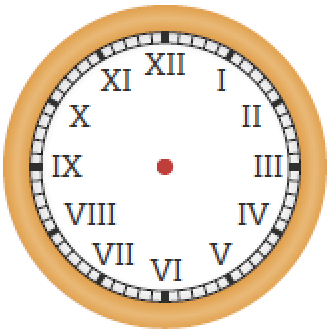
	Papa João Paulo II	Papa João Paulo segundo
	Papa Paulo VI	Papa Paulo ____________________
	Papa Bento XVI	Papa Bento ____________________
	Papa Pio X	Papa Pio ______________________
	Leão XIV	Papa Leão _____________________

02. A cada acontecimento histórico, associe o século correto, utilizando algarismos romanos:

Fato histórico	Ano	Século
Chegada dos europeus na América	1492	
Chegada dos portugueses ao Brasil	1500	
Revolução Francesa	1789	
Lei Áurea	1888	
Fim da Segunda Guerra Mundial	1945	

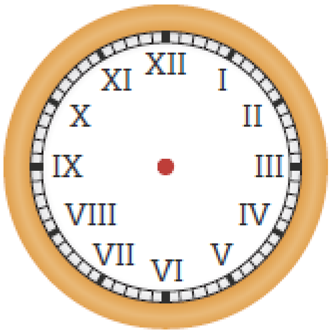
03. Utilizando uma régua, faça os ponteiros para marcar corretamente as horas indicadas:

a)



15h00

b)



8h30

04. Complete corretamente a tabela:

Sistema de Numeração Romano	Sistema de Numeração Decimal
XLVIII	
	61
XCCCIX	
	119
CDXXXIV	

Para representar um número (uma quantidade), podemos utilizar diferentes tipos de **numerais**, como os romanos, egípcios, entre outros.

Ordens e classes

Em um número, a **posição** que o algarismo ocupa é chamada de **ordem**.
O conjunto de três ordens forma uma **classe**.

Milhões			Milhares			Unidades simples		
C	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**	**C**	**D**	**U**
	1	2	4	9	8	7	6	5

A primeira ordem é a das unidades simples;
A segunda ordem é a das dezenas simples;
A terceira ordem é a das centenas simples;

Essas três ordens formam a classe das unidades simples.

A quarta ordem é a das unidades de milhares;
A quinta ordem é a das dezenas de milhares;
A sexta ordem é a das centenas de milhares;

Essas três ordens formam a classe dos milhares.

A sétima ordem é a das unidades de milhões;
A quinta ordem é a das dezenas de milhões;
A sexta ordem é a das centenas de milhões;

Essas três ordens formam a classe dos milhões.

Aquecimento

01. Escreva o número 19, utilizando a numeração maia, egípcia e romana.

Direto ao assunto

Pedro convidou **10 amigos** para brincar em casa. Enquanto contava, pensou: "O número 10 é um **número inteiro positivo**, porque me mostra a **quantidade** de amigos que estarão comigo, cada um deles **indivisível**."

No dia seguinte, porém, **nenhum amigo apareceu**. Pedro voltou a refletir: "Agora, não tenho nenhum amigo aqui. O único número que representa essa **ausência de quantidade** é o **zero**."

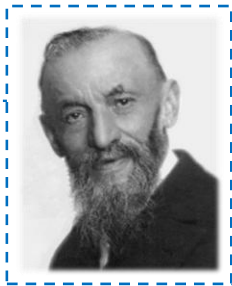
Mas imagine se Pedro resolvesse pedir **R$ 1 emprestado** a cada um desses amigos. Nesse caso, ele passaria a dever R$ 10 e concluiu: "Essa situação de dívida só poderia ser representada por um **número inteiro negativo**."

Em todas as situações vividas por Pedro, estamos lidando com **números inteiros**. Dentro desse conjunto, destacam-se os **inteiros positivos** e o **zero**, que juntos formam o conjunto dos <u>**números naturais**</u>.

A característica essencial dos números naturais é a sua relação direta de **um para um** com objetos indivisíveis do mundo real, ou seja, eles representam a **contagem natural** desses objetos.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

A formalização dos números naturais surgiu no século XIX com Giuseppe Peano (1858 – 1932), que em 1889 apresentou os **Axiomas de Peano**. Com eles, deu-se uma base lógica e rigorosa para os números naturais, mostrando como todos podem ser construídos a partir do número zero e da ideia de sucessor.



Símbolo: $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \ldots\}$$

Propriedades

1) Comutativa aditiva – A ordem das parcelas não altera a soma.

Exemplo: $3 + 5 = 5 + 8$

2) Comutativa multiplicativa – A ordem dos fatores não altera o produto.

Exemplo: $3 \times 5 = 5 \times 3$

3) Associativa aditiva – Na soma de três ou mais parcelas, podemos escolher quaisquer duas para somar primeiro.

Exemplo: $(3 + 5) + 9 = 3 + (5 + 9)$

4) Associativa multiplicativa – No produto de três ou mais fatores, podemos escolher quaisquer dois para multiplicar primeiro.

Exemplo: $(3 \times 5) \times 9 = 3 \times (5 \times 9)$

5) Distributividade – A multiplicação de um número por uma soma é igual à soma dos produtos entre o número natural e cada uma das parcelas.

Exemplo: $3 \times (5 + 9) = 3 \times 5 + 3 \times 9$ **ou** $(5 + 9) \times 3 = 3 \times 5 + 3 \times 9$

6) Elemento neutro aditivo – Existe um número natural que, somado com qualquer outro valor natural, não altera seu valor: o número zero.

Exemplo: $3 + 0 = 3$ $0 + 18 = 18$ $955 + 0 = 955$

Agora, observe as duas situações:

Situação I

Situação II

Na situação I, temos 3 árvores com 4 pássaros em cada, totalizando:

$$4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12 \text{ pássaros}$$

Na situação II, temos 4 árvores com 3 pássaros em cada, totalizando:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12 \text{ pássaros}$$

Temos duas **situações diferentes**, em que a ordem dos fatores foi **alterada**, mas o **produto permaneceu o mesmo**.

Chamamos essa característica da multiplicação de **propriedade comutativa**.

> A **propriedade comutativa** da multiplicação nos garante que a ordem dos fatores não altera o produto.

Tabuada

O termo **"tabuada"** tem origem no latim *tabula*, que significa **tábua** ou **tabela**. Na antiguidade, os romanos e outras civilizações usavam tábuas de madeira ou pedra para gravar informações, incluindo cálculos matemáticos. A tabuada é a base para a realização de cálculos mais complexos, como divisão, frações e até mesmo álgebra. Por isso, deve ser memorizada.

Aquecimento

01. Se três produtos custam R$ 55,00, quanto custarão doze produtos? Calcule mentalmente.

____

Direto assunto

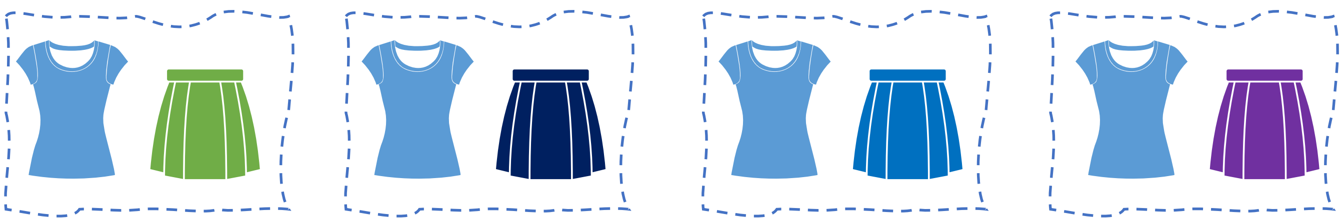
Nessa lição, vamos revisar a quarta principal aplicação da definição de multiplicação — **o princípio fundamental da contagem (princípio multiplicativo)** –, **multiplicação mental** pela técnica da decomposição e entender o **fatorial de um número natural**.

<u>Princípio fundamental da contagem</u>

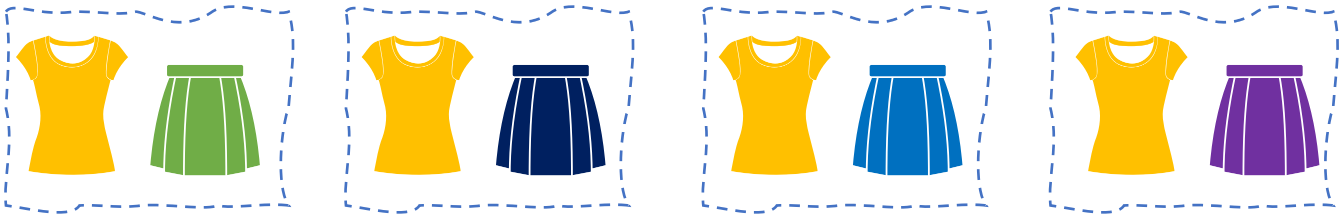
Considere o exemplo: Juliana possui 3 blusas diferentes e 4 saias, também diferentes. De quantas maneiras diferentes Juliana pode se vestir utilizando uma blusa e uma saia?

Vamos ilustrar essa situação:

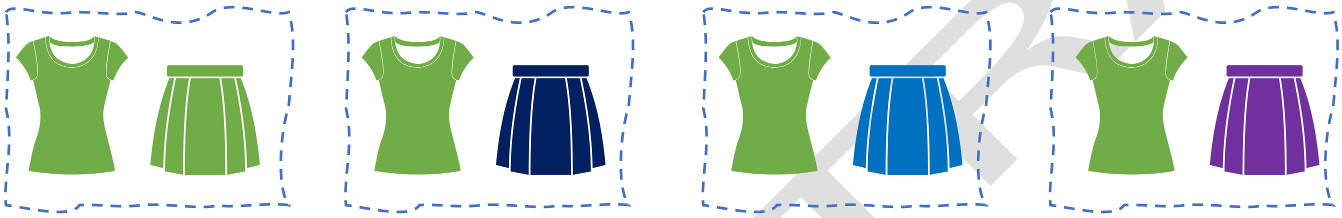
Vamos iniciar a contagem pela **<u>blusa azul</u>**. Com ela, temos **<u>4 possibilidades</u>** diferentes de saias para combinarmos:



Agora, vamos para a contagem com a **blusa amarela**. Novamente, temos **4 possibilidades** diferentes de saias para combinarmos.



Por fim, vamos para a contagem com a **blusa verde**. Novamente, temos **5 possibilidades** diferentes de saias para combinarmos.



Podemos perceber que, para cada uma das 3 blusas, tínhamos 4 opções de saias para combinarmos. Portanto, o total de maneiras diferentes que Juliana pode se vestir pode ser calculada como:

$$4 + 4 + 4 = 3 \times 4$$

Sendo 3 o total de blusas diferentes e 4 o total de saias diferentes que possui.

A escolha da blusa é a **1ª etapa** do vestir e a escolha da saia a **2ª etapa**, cada uma com uma quantidade diferente de possibilidades.

O princípio fundamental da contagem (PFC) nos diz que, para contarmos o total de possibilidades de realização de um evento em etapas, basta multiplicarmos o total de possibilidades de cada etapa.

Exemplo: Com seis opções de prato principal e sete opções de bebida, de quantas formas diferentes uma pessoa pode fazer uma refeição com um prato principal e uma bebida?

Solução: 1ª etapa: 6 opções (prato principal); 2ª etapa: 7 opções (bebida);

$6 \times 7 = 42$ formas diferentes

Fatorial

O **fatorial de um número natural** (maior ou igual a dois) é a multiplicação desse número por todos os seus antecessores, até chegar ao número 1.

Símbolo: !

Exemplos:

a) 3! (Leitura: Três fatorial ou fatorial de três)

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

b) 5!

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Obs.: Utilizamos o resultado anterior de 3!

$$= 20 \times 6$$

$$120$$

c) 6!

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Obs.: Utilizamos o resultado anterior de 5!

$$6 \times 120$$

$$720$$

d) 9!

$$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Obs.: Utilizamos o resultado anterior de 6!

$$= 72 \times 7 \times 720$$

$$= 504 \times 720$$

$$362\,880$$

Subtrações sucessivas

Outra maneira de entender a divisão é por meio de **subtrações sucessivas**.

Exemplo: A divisão 15 ÷ 3 representa quantas vezes, no máximo, é possível subtrair o 3 de 15.

1) 15 – 3 = 12	**2)** 12 – 3 = 9	**3)** 9 – 3 = 6	**4)** 6 – 3 = 3	**5)** 3 – 3 = 0

Conseguimos subtrair 3 de 15 cinco vezes. Logo, **15 ÷ 3 = 5**.

Quantas vezes cabe

A divisão também pode ser vista como uma operação que responde à pergunta: **"Quantas vezes uma quantidade cabe dentro de outra?"** Por exemplo, ao dividir 20 por 5, você está verificando quantas vezes o número 5 "cabe" no número 20. Nesse caso, a resposta é 4, pois 5 + 5 + 5 + 5 = 20.

Relação fundamental da divisão

Observe a divisão:

$$\begin{array}{rr|l} & 4\,8 & 5 \\ \cline{3-3} - & 4\,5 & 9 \\ \cline{1-2} & 3 & \text{U} \end{array}$$

O dividendo, o divisor, o quociente e o resto dessa divisão se **relacionam** através de operações aritméticas.

$$9 \times 5 + 3 = 48$$

Em qualquer divisão, o **dividendo** é igual ao quociente vezes o divisor mais o resto.

Maior resto possível

Observe os restos das divisões por 7 abaixo:

$$\begin{array}{r|l} 8 & \underline{\;7\;} \\ -7 & 1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & \underline{\;7\;} \\ -7 & 1 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & \underline{\;7\;} \\ -7 & 1 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 11 & \underline{\;7\;} \\ -7 & 1 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;7\;} \\ -7 & 1 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & \underline{\;7\;} \\ -7 & 1 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 14 & \underline{\;7\;} \\ -7 & 2 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & \underline{\;7\;} \\ -14 & 2 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & \underline{\;7\;} \\ -14 & 2 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 17 & \underline{\;7\;} \\ -14 & 2 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & \underline{\;7\;} \\ -14 & 2 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 19 & \underline{\;7\;} \\ -14 & 2 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & \underline{\;7\;} \\ -14 & 2 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 21 & \underline{\;7\;} \\ -21 & 3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Em todas as divisões por 7, observamos que os restos foram: **0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6** — nunca 7 ou mais. Assim, concluímos que:

1) O resto é **sempre menor que o divisor**;
2) O **maior resto possível** tem sempre **uma unidade a menos que o divisor**.

Aquecimento

01. Calcule os resultados das operações:

a) 135 801 + 199 549 =	b) 809 056 – 146 961 =
c) 98 × 87 =	d) 7296 ÷ 12 =

Um pouco de história

No início da álgebra moderna, os cálculos ainda eram escritos por extenso. Aos poucos, matemáticos europeus começaram a criar símbolos para simplificar as expressões: Widman introduziu os sinais + e – (1489), Oughtred o da multiplicação (×) em 1631, e Rahn o da divisão (÷) em 1659.

Mas o marco mais elegante veio com o médico e matemático galês **Robert Recorde**, que em 1557 apresentou o sinal de igual (=), explicando:

"Nada pode ser mais igual do que duas
linhas de mesmo comprimento."

Essas invenções formaram a base da linguagem algébrica. No entanto, faltava ainda uma maneira simples de representar **repetições de multiplicação** — e é aí que surge a **potenciação**.

Durante muito tempo, para representar o "quadrado" ou o "cubo" de um número, os matemáticos escreviam tudo em palavras, como *quadratum* ou *cubus*. Essa escrita era longa e pouco prática.

Foi o filósofo e matemático francês René Descartes (1596–1650) quem revolucionou isso. Em 1637, em sua obra *La Géométrie*, ele passou a escrever as potências de modo simbólico, **sobrescrito**: 5^2, 5^3, ... ao invés de 5×5 ou $5 \times 5 \times 5$.

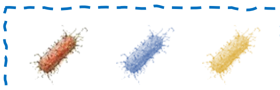
Essa ideia simples — colocar um pequeno número no alto da letra — permitiu representar com clareza qualquer grau de **potência**.

A notação de Descartes deu à álgebra a concisão que faltava. Desde então, o pequeno expoente tornou-se um dos símbolos mais poderosos da matemática, resumindo em um traço curto a ideia de **multiplicação repetida**.

Direto ao assunto

Imagine uma colônia inicial de 3 bactérias. A cada hora, cada bactéria se divide em 3. Quantas bactérias haverá após 3 horas de crescimento?

Hora inicial:

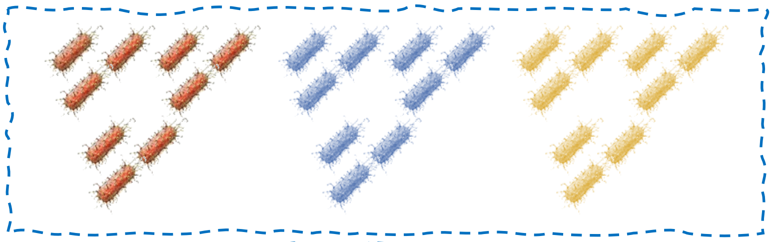


3 bactérias

1 hora depois:

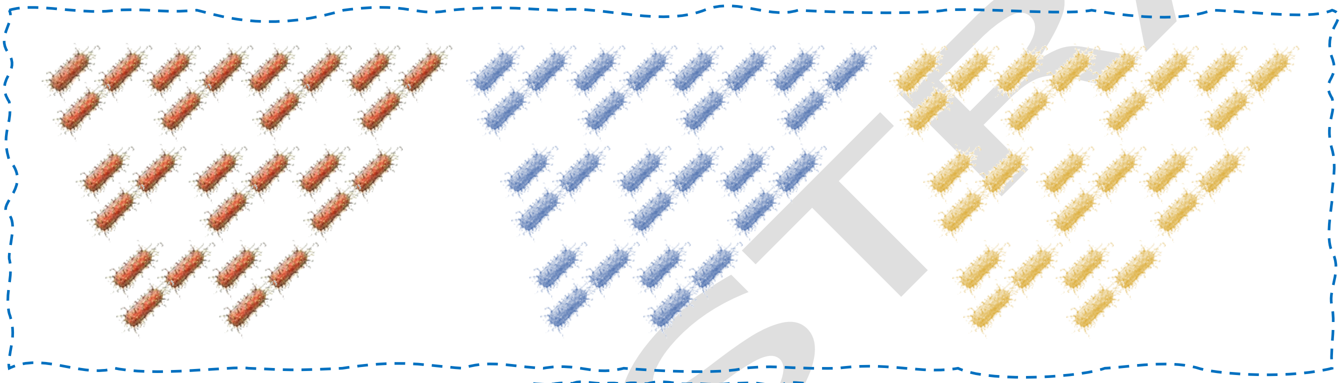
9 bactérias

2 horas depois:



27 bactérias

3 horas depois:



81 bactérias

Resposta: Após 3 horas de crescimento, haverá 81 bactérias.

Agora, vamos analisar os valores obtidos no exemplo.

$$3$$

$$9 = 3 \times 3$$

$$27 = 3 \times 3 \times 3$$

$$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

⇒ O número 9 é a **multiplicação de dois fatores 3**.

⇒ O número 27 é a **multiplicação de três fatores 3**.

⇒ O número 81 é a **multiplicação de quatro fatores 3**.

Essa é a principal característica da nova operação que vamos introduzir agora: a **potenciação**!

Potenciação é um **produto de fatores iguais**.

De modo mais simples, podemos entender que a potenciação é uma **multiplicação de dois ou mais números iguais**.

Exemplos:

a) $7 \times 7 \times 7$

b) $3 \times 3 \times 3 \times 3$

c) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Notação de uma potência

Para representarmos uma potência:

1) Escrevemos **o fator que está sendo multiplicado** normalmente;

2) Em seguida, escrevemos a **quantidade de fatores multiplicados** em **tamanho menor, acima da linha** — modo que chamamos *sobrescrito*.

Exemplos:

a) $7 \times 7 \times 7 = 7^3$

7 representa o fator que está sendo multiplicado.
3 representa quantos fatores 7 estão sendo multiplicados.

b) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

3 representa o fator que está sendo multiplicado.
4 representa quantos fatores 3 estão sendo multiplicados.

c) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

2 representa o fator que está sendo multiplicado.
6 representa quantos fatores 2 estão sendo multiplicados.

Atenção: Cuidado para não confundir potenciação e multiplicação.

Potenciação	Multiplicação
Multiplicação de fatores iguais	Soma de parcelas iguais
Exemplo: $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$	**Exemplo:** $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$

Leitura complementar

A origem do jogo de xadrez

Conta uma antiga lenda indiana que, há muitos séculos, um poderoso rei travou uma guerra terrível. Voltou vitorioso, mas profundamente triste: seu único filho havia morrido no campo de batalha, sacrificando a própria vida para dar a vitória ao seu reino. O trono, antes símbolo de glória, tornou-se para o rei um peso insuportável.

Foi então que um jovem sábio chamado Sessa apresentou-se ao palácio trazendo um tabuleiro com sessenta e quatro casas e peças de formas e movimentos diferentes. Explicou que o jogo representava a guerra — porém sem violência. Cada peça tinha um papel importante: o rei dependia dos peões, e a vitória só vinha com prudência e cooperação. O sábio quis ensinar que a verdadeira realeza não está apenas na força, mas na sabedoria, na prudência e no sacrifício.

O rei encantou-se e quis recompensar Sessa. “Peça o que desejar”, disse. O jovem pediu o que parecia pouco: um grão de trigo na primeira casa e o dobro em cada uma das seguintes. O rei, sentindo-se ofendido pela modéstia do pedido, ordenou que o atendesse imediatamente — apenas para descobrir, pouco depois, o impossível: seriam necessários mais grãos do que havia em todo o reino.

Com esse gesto, Sessa revelou a força dos números, o poder das potências e a humildade diante do infinito — virtudes que superam a arrogância dos poderosos.

Comovido, o rei entendeu que o sábio o havia libertado da soberba e conduzido à sabedoria. Compreendeu que, assim como seu filho dera a vida pelo povo, o amor verdadeiro sempre exige sacrifício — e que nenhum reinado é justo sem entrega.

Do mesmo modo, a História nos mostra o exemplo supremo do amor e da realeza: Jesus Cristo, o Rei dos reis, que sacrificou Sua própria vida para reconciliar o homem com Deus.

O xadrez, então, recorda não apenas uma antiga guerra, mas o chamado à sabedoria, à prudência e ao amor que se entrega por inteiro.

Transformado pela lição do jovem Sessa, o rei voltou a governar — não mais movido pela glória ou pela força, mas com humildade e compaixão, dedicando-se novamente ao povo que havia deixado de lado.

Critério de divisibilidade por 3

Observe os múltiplos de 3, excluindo o zero.

$$m(3)^* = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...\}$$

Vamos organizar os múltiplos de três em grupos de 3 em 3.

3	**6**	**9**
12	15	18
21	24	27
30	33	36
39	42	45
A **soma dos algarismos** dos números desse grupo sempre resulta em **3**.	A **soma dos algarismos** dos números desse grupo sempre resulta em **6**.	A **soma dos algarismos** dos números desse grupo sempre resulta em **9**.

Observação: Para o número **39**, a soma dos algarismos é **12** e, somando novamente os algarismos de **12**, obtemos **3**.

Assim, concluímos:

> Um número é **divisível por 3** se a soma de seus algarismos resultar em um número divisível por 3.

Observação: Se não conseguirmos identificar facilmente se a soma dos algarismos é múltipla de 3, podemos somar novamente os algarismos do resultado. Isso tornará o número menor e mais fácil de verificar se é divisível por 3.

Critério de divisibilidade por 6

Para o critério de divisibilidade por **6**, basta percebermos que **6 = 2 × 3**, ou seja, **6 é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo**. Assim, concluímos:

> Um número é **divisível por 6** se for divisível por 2 e por 3 simultaneamente.

Módulo 02
Aula 08 – Mínimo múltiplo comum II

Aquecimento

01. (OBMEP) Qual das expressões abaixo tem como resultado um número ímpar?

a) $7 \times 5 \times 11 \times 13 \times 2$
b) $(2005 - 2003) \times (2004 + 2003)$
c) $7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$
d) $5^2 + 3^2$
e) $3 \times 5 + 7 \times 9 + 11 \times 13$

Direto ao assunto

Pense em um pisca-pisca de duas cores: uma luz acende **a cada 4 segundos** e a outra **a cada 6 segundos**. Quando o aparelho é ligado, as duas acendem juntas. Depois, cada uma segue o seu ritmo — até que, em certo instante, voltam a brilhar ao mesmo tempo.

Esse momento em que as duas luzes acendem juntas novamente é determinado pelo mínimo múltiplo comum (MMC) entre os intervalos de tempo de cada uma. Ele mostra quando diferentes repetições voltam a coincidir.

Nesta lição, vamos usar o MMC para resolver problemas, descobrindo em que momento eventos ou repetições voltam a ocorrer simultaneamente.

Exercícios resolvidos

01. João corta o cabelo de 10 em 10 dias e Marcelo de 15 em 15 dias. Eles sempre cortam o cabelo no mesmo lugar e horário. Certo dia, coincidiu de se encontrarem no salão. Quantos dias, no mínimo, irão se passar até que isso ocorra novamente.

Solução: A informação "de 10 em 10 dias" nos dá a ideia de múltiplos de 10.

10, 20, 30, 40, 50, 60...

Aquecimento

01. Enuncie o postulado de determinação da reta.

____

____

Direto ao assunto

Nesta lição, vamos revisar as diferentes posições de uma reta e os conceitos de semirreta e segmento de reta.

Retas coplanares

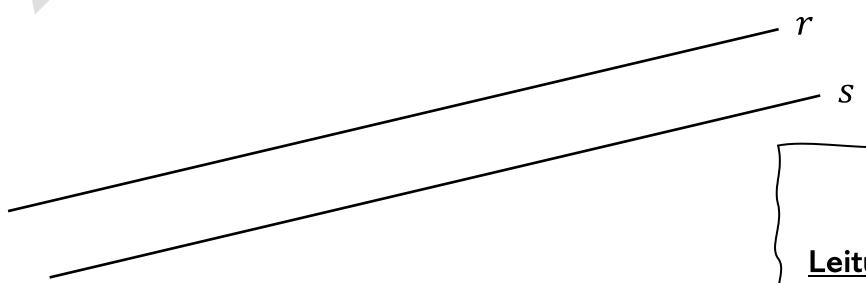
Dizemos que **duas ou mais retas são coplanares** quando pertencem ao mesmo plano.

Posições relativas entre duas retas coplanares

Quando duas retas estão no mesmo plano, podemos classificá-las conforme sua relação de posição entre si:

Retas Paralelas

São retas que possuem a **mesma direção**.
São retas que **nunca se encontram**.
São retas que **não possuem pontos em comum**.

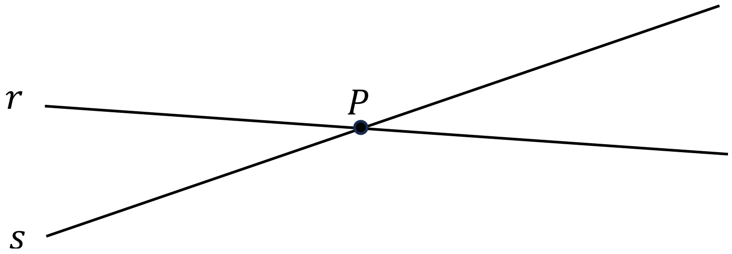


Símbolo: //

Leitura: $r\ //\ s \rightarrow r$ paralela à s

<u>Retas Concorrentes</u>

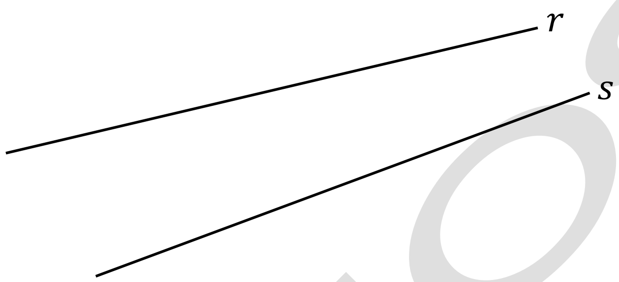
São retas que **não estão na mesma direção**.
São retas que **se encontram**.
São retas que **possuem um ponto em comum**.



A reta r é concorrente à reta s.
O ponto P é o ponto em comum.

<u>Observação:</u> Em algumas situações ilustradas, pode parecer que as retas não se cruzam, sugerindo paralelismo. No entanto, se elas não seguirem exatamente a mesma direção, não são paralelas, mas sim concorrentes.

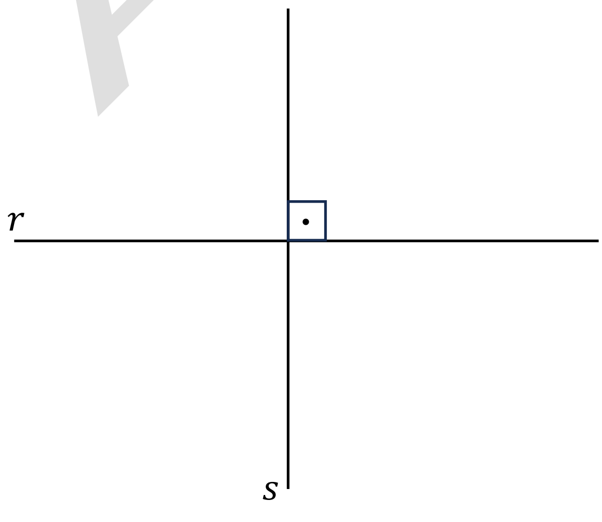
<u>Exemplo:</u>



A reta r é concorrente à reta s.

<u>Caso especial de retas concorrentes: retas perpendiculares</u>

Um tipo especial de retas concorrentes são as **retas perpendiculares**, que **se cruzam formando um ângulo reto (90°)**.



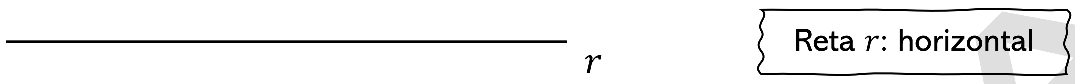
<u>Símbolo:</u> $\perp$

<u>Leitura:</u> $r \perp s \rightarrow r$ perpendicular à s

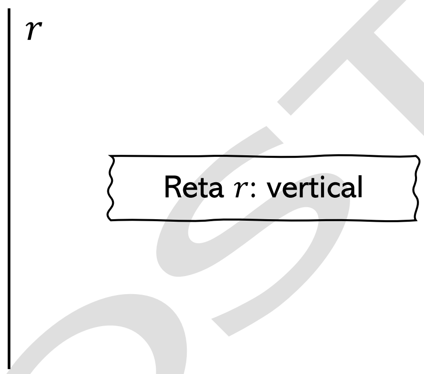
Posições da reta em relação ao solo

As retas também podem ser classificadas de acordo com sua orientação no espaço:

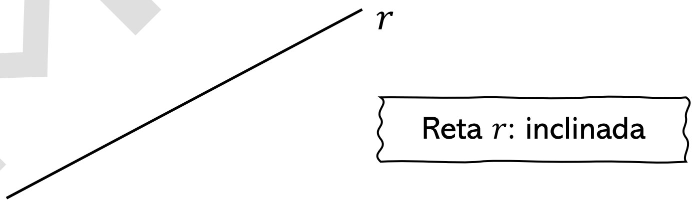
Reta Horizontal: Mantém-se paralela ao solo ou a um plano de referência.



Reta Vertical: Está orientada "em pé", **perpendicularmente** ao solo, ou seja, **formando um ângulo reto (90°)** com o solo.

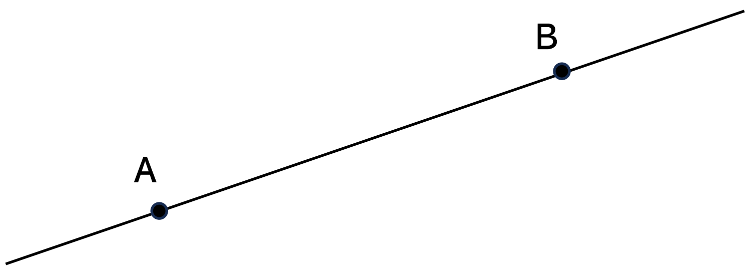


Reta Inclinada (Oblíqua): Forma um ângulo qualquer com o solo, sem ser exatamente horizontal nem vertical.



Semirreta

Considere uma reta que passa por dois pontos, A e B.

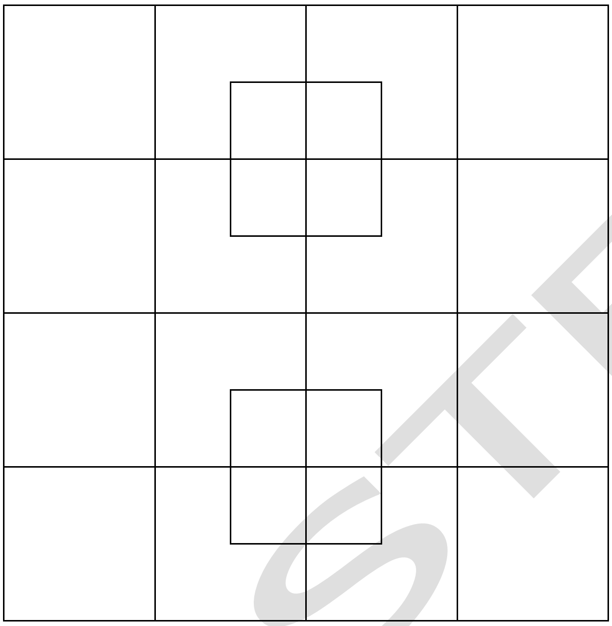


Módulo 05

Aula 01 – Definição e leitura de frações

Aquecimento

01. Qual o total de quadrados que temos na imagem abaixo?



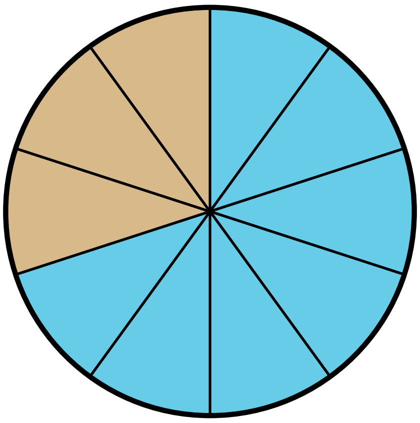
Direto ao assunto

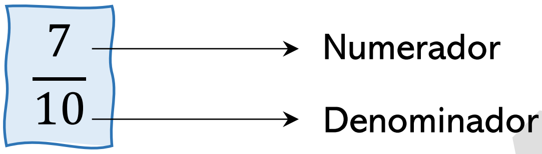
Nessa lição, vamos revisar a definição e leitura de frações.

As frações surgiram da necessidade de dividir um inteiro em partes menores. Os egípcios foram os primeiros a registrá-las, usando-as para calcular tributos proporcionais e para redesenhar limites de terras após as cheias do Nilo. O **Papiro de Rhind** (1650 a.C.) mostra como trabalhavam principalmente com frações unitárias, evidenciando sua importância nos cálculos do dia a dia.

Uma fração é uma parte de um todo que foi dividido em partes iguais.

Se considerarmos a Terra como 1 inteiro e repartirmos a mesma em 10 partes iguais, teremos 7 dessas partes ocupadas por água.





O **denominador** representa o total de **partes iguais** em que o inteiro foi dividido. O **numerador** indica quantas dessas partes estão sendo consideradas.

<u>Leitura de uma fração</u>

1) Numerador: O numerador de uma fração deve sempre ser lido como um **número cardinal** (contagem).

2) Denominador:

De 2 a 9	
2	Meio ou meios
3	Terço ou terços
4	Quarto ou quartos
5	Quinto ou quintos
6	Sexto ou sextos
7	Sétimo ou sétimos
8	Oitavo ou oitavos
9	Nono ou nonos

10, 100, 1000	
10	Décimo ou décimos
100	Centésimo ou centésimos
1000	Milésimo ou milésimos

Maiores que 10	
11	Onze avos
12	Doze avos
13	Treze avos
20	Vinte avos
25	Vinte e cinco avos
50	Cinquenta avos
200	Duzentos avos
780	Setecentos e oitenta avos

<u>**Observação:**</u> Toda fração em que o numerador e o denominador **são iguais** representa 1 inteiro.

Módulo 05
Revisão 5.4

01. Escreva os números abaixo utilizando símbolos romanos:

a) 445 = ____________________

b) 1687 = ____________________

02. Escreva todos os números que podemos formar com os algarismos 1, 6 e 8, sem repeti-los:

03. Escreva, utilizando-se apenas de algarismos, os números abaixo:

a) 3,2 milhares: ____________________________

b) 9 milhões: ____________________________

04. Determine uma sequência de quatro números naturais pares consecutivos, onde o 3º é igual a 380.

______, ______, ______, ______

05. Marcelo e sua família estão fazendo uma viagem de carro de 650 km. Eles percorreram 88 km na primeira hora e 112 km na segunda hora. Quantos quilômetros faltam para completar a viagem?

Módulo 05

Aula 14 – Potenciação de frações

Aquecimento

01. Calcule o resultado da divisão de frações:

$$\frac{3}{5} \div \frac{5}{7} =$$

Direto ao assunto

Nessa lição, vamos introduzir o conceito de potenciação aplicado às frações.

Potenciação é um produto de fatores iguais.

Para as frações, a potenciação segue a mesma lógica utilizada nos números naturais. Observe:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

Aplicamos a regra de multiplicação de frações:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{4^3}{5^3}$$

Observe que ambos, numerador e denominador, ficaram elevados ao expoente externo ao parêntese. Resolvendo as potências, temos:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

Para resolver uma potenciação de fração, basta elevarmos ambos, numerador e denominador, ao expoente externo ao parêntese e calcular seus respectivos resultados.

Aquecimento

01. Calcule o resultado da potência abaixo:

$$\left(\frac{3}{8}\right)^4 =$$

Direto ao assunto

Nessa lição, vamos introduzir o conceito de raiz quadrada aplicado às frações.

A raiz quadrada de um primeiro número é um segundo número que, elevado ao quadrado, resulta no primeiro.

Para as frações, a raiz quadrada segue a mesma lógica utilizada nos números naturais. Observe:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}, \qquad \text{pois} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Para calcular a raiz quadrada de uma fração, basta calcularmos, separadamente, a raiz quadrada do numerador e do denominador.

Exemplos:

a) $\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}} = \frac{5}{9}$

b) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$