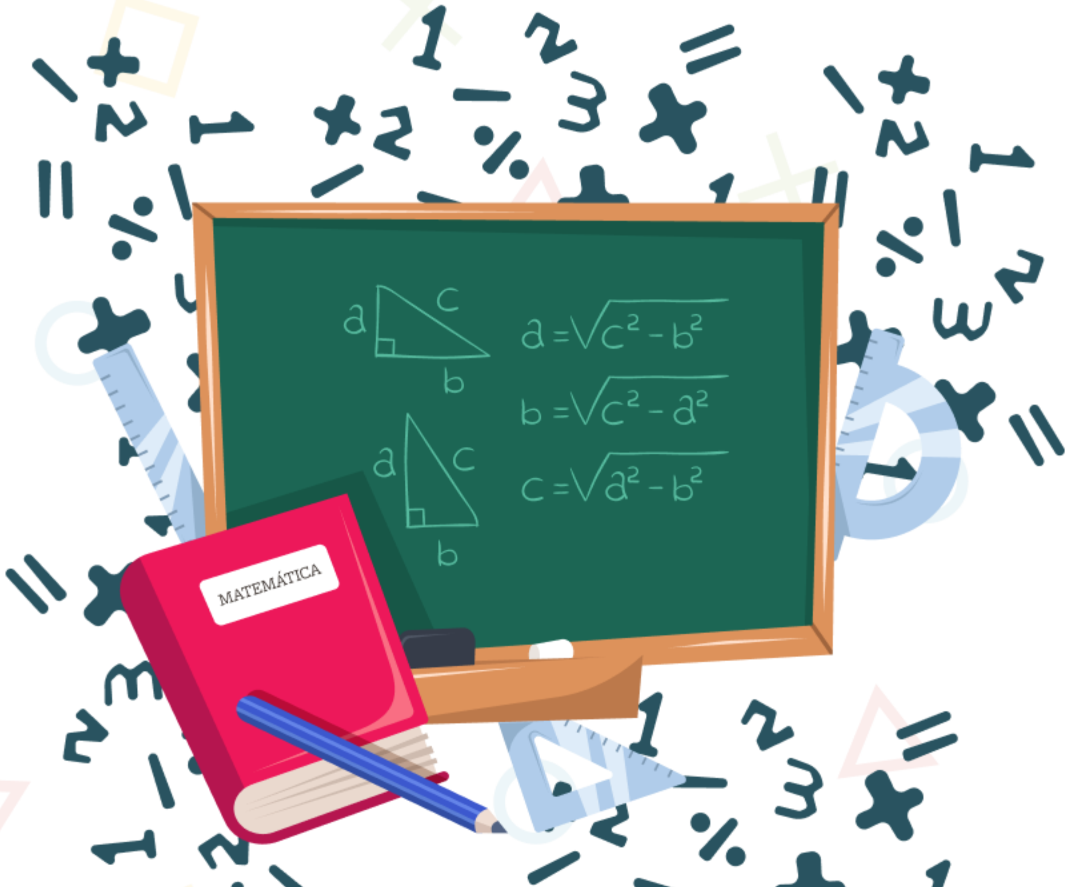
Prof. Vinicius Soares

A Matemática do Ensino Fundamental

Apostila do 7º Ano

Primeiro Semestre



Prof. Vinicius Soares

A Matemática Do Ensino Fundamental

Apostila do 7º Ano

Primeiro Semestre

Este livro pertence a:

____

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

S237m Santos, Vinícius Soares dos.
A Matemática do Ensino Fundamental: 7º Ano / Vinícius Soares dos Santos; ilustrador Marco Túlio Araújo Silva Lôbo. – Goiânia, GO: Ed. do Autor, 2023.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-5872-407-0

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Lôbo, Marco Túlio Araújo Silva. II. Título.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Conteúdo

- ✅ Revisões semanais;
- ✅ Exercícios complementares;
- ✅ Exercícios de vestibulares, concursos e olimpíadas;
- ✅ Avaliação por módulo;
- ✅ Orientações e gabarito.

Orientações ao aluno

Querido aluno, esta é a apostila “A Matemática do Ensino Fundamental (AMEF)”. Com ela, você encontrará tudo o que precisa para aprender matemática de maneira estruturada e eficiente. Cada conceito será apresentado de forma clara através de explicações, exemplos e exercícios que te ajudarão a entender e fixar o conteúdo com segurança, desenvolvendo, assim, seu intelecto e suas virtudes, de modo que encontre e defenda a **Verdade**.

Antes de iniciar seus estudos, faça sempre uma oração.

Sugestão:

"Inspirai, ó Deus, as nossas ações e ajudai-nos a realizá-las, para que em Vós comece e em Vós termine tudo aquilo que fizermos. Por Cristo nosso Senhor. Amém."

Siga a ordem correta de estudos sugerida no “Livro do Professor”.

Resolva os exercícios de modo claro e organizado. Isso treinará sua virtude da **ordem**. Não ignore os exercícios fáceis, pois eles irão aprimorar o seu **entendimento**. Não desista nos exercícios difíceis, pois eles irão aprimorar a sua **perseverança**.

Sempre tenha **humildade** ao resolver um exercício. Ela nos deixa cientes de que somos capazes, mas também nos mostra que naturalmente não sabemos tudo e sempre temos algo a aprender.

Não se canse nas repetições. Todo bom atleta, para chegar ao nível de excelência, passa por muitos treinos repetitivos.

Os estudos feitos com capricho irão educar seu intelecto e sua vontade – os principais atributos de sua alma.

Tenha a certeza de que ser um jovem cada vez mais inteligente te fará cada vez mais feliz.

Bons estudos!

Professor Vinícius Soares

Aquecimento

01. Escreva, utilizando algarismos, o número correspondente a:

Doze bilhões e setenta: ______________________________

02. Faça a composição do número formado por:

15 centenas, 24 dezenas e 75 unidades: ______________________

Direto ao assunto

Nessa lição, vamos revisar o conceito de potenciação e analisar padrões no algarismo das unidades de algumas potências.

Potenciação é uma multiplicação de fatores iguais.

Exemplo:

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$$

Base: 7 → representa o fator que está sendo multiplicado repetidamente.

Expoente: 4 → representa quantos fatores iguais à base estão sendo multiplicados.

- **Leitura**

[Base/cardinal] elevado à **[expoente/ordinal]** potência.

Exemplos:

a) 3^2 → três elevado à segunda potência.

b) 2^3 → dois elevado à terceira potência.

c) 7^4 → sete elevado à quarta potência.

d) 1^5 → um elevado à quinta potência.

Uma potência com **expoente 2** está relacionada ao cálculo da área de um **quadrado** cujo lado tem a mesma medida da base da potência. Por isso, este expoente pode ser lido como **"ao quadrado"**.

Exemplo: 9^2 → nove elevado ao quadrado.

Uma potência com **expoente 3** está relacionada ao cálculo do volume de um **cubo** cuja aresta tem a mesma medida da base da potência. Por isso, este expoente pode ser lido como **"ao cubo"**.

Exemplo: 7^3 → sete elevado ao cubo.

Resolução

Para calcularmos o resultado de uma potência, multiplicamos tantos fatores iguais à base quanto indica o expoente.

Exemplos:

a) $6^2 = 6 \times 6 = 36$

b) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$

Obs.: Lembre-se de que temos dois símbolos para a multiplicação: $\cdot$ e $\times$.

Casos especiais

1) Todo número elevado a 1 é igual a ele mesmo.

2) Todo número elevado a zero, com exceção do zero, é igual a 1, **pois indica sua divisão por si mesmo**.

3) O número 1 elevado a qualquer número é igual a 1.

4) O número zero elevado a qualquer número (diferente de zero) é igual a zero.

5) Uma **potência de base 10**, da forma 10^N, tem por resultado o algarismo 1 seguido de N zeros.

Padrões

Em algumas potências, podemos observar padrões no **algarismo das unidades** de seus resultados.

Exemplo: potências de base 3.

$3^1 = \mathbf{3}$	$3^2 = \mathbf{9}$	$3^3 = 2\mathbf{7}$	$3^4 = 8\mathbf{1}$
$3^5 = 24\mathbf{3}$	$3^6 = 72\mathbf{9}$	$3^7 = 218\mathbf{7}$	$3^8 = 656\mathbf{1}$

Observe que o padrão de repetição do algarismo das unidades dos resultados das potências de base 3 é:

3 – 9 – 7 – 1

Exercícios resolvidos

01. Qual o algarismo das unidades do resultado da potência 3^{1031}?

Solução: como sabemos, o padrão dos algarismos das unidades das potências de base 3 é:

3 – 9 – 7 – 1

Ou seja, repete-se de 4 em 4 algarismos. Vamos, portanto, dividir 1031 por 4 para descobrir quantos ciclos completos de 4 algarismos cabem em 1031 fatores e observar o resto para determinar quantos algarismos sobram.

$$1031 \div 4 = 257, \text{resto } 3$$

Assim, temos 257 ciclos completos de 4 algarismos (3 – 9 – 7 – 1) e um ciclo incompleto de apenas 3 algarismos, como indica o resto.

3 – 9 – **7**

Resposta: o algarismo das unidades do resultado da potência 3^{1031} é 7.

Exercícios de fixação

01. Represente 9 x 9 x 9 na forma de potência. Em seguida, determine a base e o expoente dessa potência.

Potência: ___________ Base: ___________ Expoente: ___________

02. Escreva corretamente como se leem as potências abaixo:

a) 12^2: ____

b) 56^3: ____

c) 17^1: ____

d) 15^4: ____

e) 260^{24}: ____

03. Calcule o resultado das seguintes potências:

a) 2^9 =	b) 0^{125} =
c) 18^2 =	d) 3^4 =
e) 17^0 =	f) 3^5 =

g) $214^1 =$	h) $5^3 =$
i) $1^{12} =$	j) $7^4 =$
k) $9^4 =$	l) $27^2 =$
m) $22^2 =$	n) $6^3 =$

04. O que significa um número (diferente de zero) elevado ao expoente zero?

____

____

05. Qual o resultado de qualquer número elevado a um? ________________________

06. Qual o resultado de zero elevado a qualquer número (exceto o zero)? __________

07. Qual o resultado de 1 elevado a qualquer número? _________________________

08. Determine o resultado:

a) 2^1 =	b) 57^0 =	c) 1^{60} =	d) 0^{90} =
e) 1^0 =	f) 16^0 =	g) 680^0 =	h) 1^1 =
i) 0^1 =	j) 11^0 =	k) 12^0 =	l) 853^0 =
m) 0^{50} =	n) 0^{20} =	o) 0^{60} =	p) 0^{789} =
q) 1^2 =	r) 3^0 =	s) 77^1 =	t) 1^{1000} =
u) 500^0 =	v) 6544^0 =	w) 257^0 =	x) 3654^1 =
y) 1999^1 =	z) 2022^0 =	α) 998^0 =	β) 3005^1 =
χ) 1^{200} =	δ) 0^{200} =	ε) 200^0 =	ϕ) 200^1 =

09. (Instituto Excelência/2020) O valor de $3^2 + 3^4 + 3^6 + 9^3 + 27^2$ é:

a) 2277.
b) 1986.
c) 1469.
d) Nenhuma das alternativas.

Exercícios complementares

01. Calcule, atentando-se às diferenças nos cálculos:

a) $2^6 =$
b) $6^2 =$
c) $2 \times 6 =$
d) $6 \times 2 =$
e) $3^5 =$
f) $5^3 =$
g) $3 \times 5 =$
h) $5 \times 3 =$

02. Qual a diferença entre 2^4 e 2 x 4? Explique e calcule.

03. Apesar de terem o mesmo resultado, as potências 2^4 e 4^2 diferem-se na resolução. Mostre essa diferença.

Espaço para cálculo

04. Apesar de terem o mesmo resultado, a potência 2^2 e a multiplicação 2 x 2 diferem-se na resolução. Mostre essa diferença.

Espaço para cálculo

05. Calcule as potências abaixo e responda:

$9^1 =$	$9^2 =$	$9^3 =$
$9^4 =$	$9^5 =$	$9^6 =$

O que você observa de padrão no algarismo das unidades dos resultados?

____

____

06. Por que a leitura do expoente 2 pode ser feita como “ao quadrado”?

____

____

07. Por que a leitura do expoente 3 pode ser feita como “ao cubo”?

____

____

08. Qual o algarismo das unidades da potência 3^{950}?

09. Determine, sem efetuar cálculos, os resultados das potências de base 10 abaixo:

$10^3 =$	$10^7 =$
$10^6 =$	$10^9 =$

10. Quantos algarismos possui o resultado da potência 10^{200}? ____________________

Aquecimento

01. Qual o algarismo das unidades da potência 4^{1510}?

Direto ao assunto

Na matemática, depois de estabelecermos a definição de um conceito, é muito comum estudarmos **as características que dele decorrem**, chamadas de **propriedades**. Elas funcionam como ferramentas que ampliam nosso entendimento e tornam os cálculos mais eficientes.

Agora que já definimos a operação de potenciação, vamos estudar **suas principais propriedades**. Mas afinal, por que aprender essas propriedades? Porque elas **simplificam enormemente** a resolução de problemas envolvendo potências.

Veja um exemplo simples:

Você conseguiria resolver a expressão

$$\frac{7^{995}}{7^{993}}?$$

Imagine ter que calcular primeiro 7^{995}, depois 7^{993} e, por fim, dividir um número gigantesco pelo outro. Praticamente impossível na prática.

Contudo, **uma única propriedade da potenciação** permite resolver essa expressão **mentalmente**, em poucos segundos.

Vamos então conhecer as principais **propriedades da potenciação**.

Módulo 01
Revisão 1.1

01. Em uma potência, a base é 6 e o expoente é 3. Calcule o resultado dessa potência.

02. Calcule o resultado das seguintes raízes quadradas:

$\sqrt{9} =$	$\sqrt{16} =$	$\sqrt{49} =$
$\sqrt{36} =$	$\sqrt{25} =$	$\sqrt{81} =$
$\sqrt{100} =$	$\sqrt{4} =$	$\sqrt{1} =$
$\sqrt{0} =$	$\sqrt{64} =$	$\sqrt{121} =$

Espaço para cálculos

03. Resolva as multiplicações em, no máximo, 2 minutos.

8 × 7 =	9 × 7 =	7 × 7 =	7 × 8 =	7 × 9 =
6 × 9 =	9 × 6 =	6 × 7 =	7 × 6 =	6 × 6 =
5 × 4 =	4 × 9 =	8 × 4 =	8 × 6 =	8 × 3 =
6 × 4 =	3 × 6 =	7 × 3 =	4 × 7 =	9 × 5 =

➜ Registre seu tempo: ___________ Acertos: ________ / 20

04. Registre todos os números que podem ser escritos com os algarismos 9, 5 e 6 sem repeti-los.

Qual é o maior? __________

Qual é o menor? __________

Quais são ímpares? __________

Quais são pares? __________

05. Calcule o resultado de $3536 \div 17$.

06. Encontre todos os divisores dos números abaixo:

20: ______, ______, ______, ______, ______, ______.

30: ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______.

50: ______, ______, ______, ______, ______, ______.

33: ______, ______, ______, ______.

07. Escreva os números primos de 2 até 29.

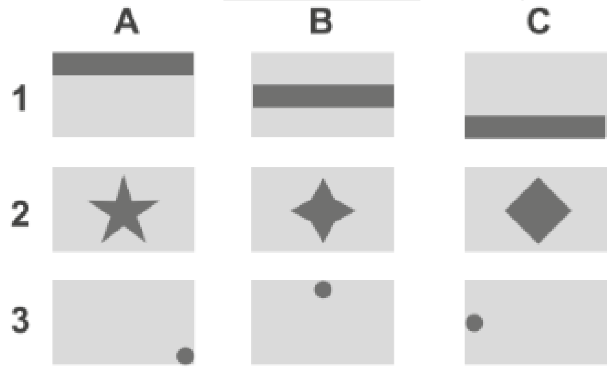
2				
				29

08. (OBMEP/2023) José comprou uma calça na loja Alfa e uma camisa na loja Beta. Luís comprou uma calça na loja Beta e uma camisa na loja Gama. Os preços aparecem na tabela abaixo. Quanto Luís gastou a mais do que José?

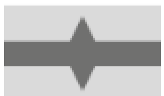
a) R$ 5,00.
b) R$ 10,00.
c) R$ 15,00.
d) R$ 20,00.
e) R$ 25,00.

	Loja **Alfa**	Loja **Beta**	Loja **Gama**
Calça	R$ 80,00	R$ 90,00	R$ 85,00
Camisa	R$ 70,00	R$ 65,00	R$ 60,00

09. (OBMEP/2023) Beatriz tem nove carimbos retangulares de mesmo tamanho, organizados da seguinte maneira:



Usando carimbos diferentes, ela carimbou três vezes sobre o mesmo retângulo e obteve a figura:



Quais foram os carimbos que ela usou?

a) 1A, 2B e 3C.
b) 2B, 2C e 3C.
c) 1B, 2B e 3C.
d) 1B, 2B e 3B.
e) 1B, 2A e 3C.

Módulo 01

Aula 04 – Propriedades da potenciação III

Aquecimento

01. Assinale a alternativa correta:

a) $25^8 = 5^{16}$
b) $49^{14} = 7^{16}$
c) $81^6 = 3^{12}$

Direto ao assunto

Nessa lição, vamos aplicar as propriedades da potenciação na simplificação de novas expressões numéricas.

Exemplos:

1) Determine, na forma de potência, a metade de:

a) $2^{100} =$

Para calcularmos a metade de um número, basta dividi-lo por 2. Assim, a metade de 2^{100} será:

$$\frac{2^{100}}{2} = \frac{2^{100}}{2^1} = 2^{100-1} = 2^{99}$$

b) 4^{200}

Novamente, para calcularmos a metade de um número, basta dividi-lo por 2. Assim, a metade de 4^{200} será:

$$\frac{4^{200}}{2}$$

As potências, no entanto, não estão na mesma base e, consequentemente, não conseguimos aplicar a propriedade de **divisão de potências de mesma base**. No entanto, 4^{200} pode ser escrito como potência de base 2, já que $4 = 2^2$. Assim, temos:

$$\frac{4^{200}}{2} = \frac{(2^2)^{200}}{2} = \frac{2^{400}}{2} = 2^{399}$$

c) 8^{200}

$$\frac{8^{200}}{2} = \frac{(2^3)^{200}}{2} = \frac{2^{600}}{2} = 2^{599}$$

2) Determine, na forma de potência, a terça parte de:

a) $3^{100} =$

Para calcularmos a terça parte de um número, basta dividi-lo por 3. Assim, a terça parte de 3^{100} será:

$$\frac{3^{100}}{3} = \frac{3^{100}}{3^1} = 3^{100-1} = 3^{99}$$

b) 9^{500}

$$\frac{9^{500}}{3} = \frac{(3^2)^{500}}{3} = \frac{3^{1000}}{3} = 3^{999}$$

c) 27^{755}

$$\frac{27^{755}}{3} = \frac{(3^3)^{755}}{3} = \frac{3^{2265}}{3} = 3^{2264}$$

3) Determine, na forma de potência, a quinta parte de 625^{70}.

$$\frac{625^{70}}{5} = \frac{(5^4)^{70}}{5} = \frac{5^{280}}{5} = 5^{279}$$

4) Determine, na forma de potência, a sétima parte de 343^{84}.

$$\frac{343^{84}}{7} = \frac{(7^3)^{84}}{7} = \frac{7^{252}}{7} = 7^{251}$$

Exercícios de fixação

01. Aplique as propriedades da potenciação nas expressões abaixo:

a) $8^{16} \times 8^{27} =$
b) $12^{50} \div 12^{48} =$
c) $(6^{12})^{15} =$
d) $(3 \times 8)^{15} =$
e) $\left(\frac{7}{10}\right)^{14} =$

02. Transforme as expressões abaixo em potências de base 2:

a) $4 =$	b) $4^3 =$
c) $8 =$	d) $8^3 =$
e) $16 =$	f) $16^3 =$
g) $32 =$	h) $32^3 =$
i) $1024 =$	j) $1024^3 =$

03. Transforme as expressões abaixo em potências de base 3:

a) $9 =$	b) $9^4 =$
c) $27 =$	d) $27^4 =$
e) $81 =$	f) $81^4 =$
g) $243 =$	h) $243^4 =$

04. Transforme as expressões abaixo em potências de base 5:

a) $25 =$	b) $25^7 =$
c) $125 =$	d) $125^7 =$
e) $625 =$	f) $625^7 =$

05. Determine a metade dos números a seguir, na forma de potência de base 2, aplicando as propriedades da potenciação:

a) $2^{50} \rightarrow$
b) $4^{50} \rightarrow$
c) $8^{50} \rightarrow$
d) $16^{50} \rightarrow$
e) $32^{50} \rightarrow$

Exercícios complementares

01. Determine a terça parte dos números a seguir na forma de potência de base 3, aplicando as propriedades da potenciação:

a) $3^{60} \rightarrow$
b) $9^{60} \rightarrow$
c) $27^{60} \rightarrow$

02. Determine a sétima parte dos números a seguir na forma de potência de base 7, aplicando as propriedades da potenciação:

a) $7^{70} \rightarrow$
b) $49^{70} \rightarrow$

03. (IVIN/2023) A metade de 4^{100} é igual a:

a) 4^{50}
b) 2^{100}
c) 2^{50}
d) 2^{199}
e) 4^{199}

Aquecimento

01. Quantos algarismos possui o resultado da potência 10^{999}?

____

Direto ao assunto

Nessa lição, vamos revisar a definição e as propriedades dos números quadrados perfeitos.

Número quadrado perfeito

Um número quadrado perfeito é todo número que pode ser escrito com base natural[1] e expoente 2.

Exemplos:

a) 49 é um número quadrado perfeito, pois $7^2 = 49$.

b) 289 é um número quadrado perfeito, pois $17^2 = 289$.

É indispensável que o aluno faça a **memorização** dos quadrados perfeitos que se seguem.

$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$
$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$
$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$
$12^2 = 144$	$13^2 = 169$	$14^2 = 196$
$15^2 = 225$	$16^2 = 256$	$17^2 = 289$
$18^2 = 324$	$19^2 = 361$	$20^2 = 400$

[1] A definição se estende para números inteiros. Porém, nesse contexto, apenas o conjunto dos números naturais foi estudado.

Propriedades dos números quadrados perfeitos

Todo quadrado perfeito pode ser obtido através da soma dos primeiros números ímpares consecutivos.

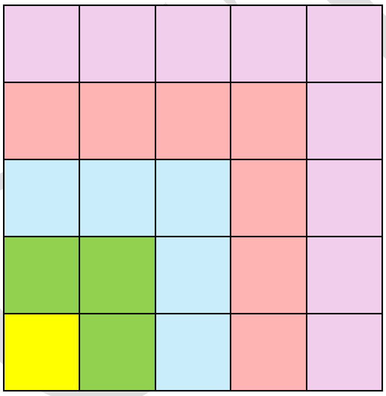
$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$



Número quadrado perfeito	Posição	Soma de números ímpares relacionada	Quantidade de números ímpares somados	Potência relacionada
1	1º	1	1	1^2
4	2º	1 + 3	2	2^2
9	3º	1 + 3 + 5	3	3^2
16	4º	1 + 3 + 5 + 7	4	4^2
25	5º	1 + 3 + 5 + 7 + 9	5	5^2

Módulo 02

Aula 01 – Os números inteiros

Aquecimento

01. Qual o menor número pelo qual devemos multiplicar 18 para que ele se torne quadrado perfeito?

a) 2　　b) 3　　c) 6　　d) 9　　e) 18

Um pouco de história

Os números negativos, embora usados de forma prática desde a Antiguidade, demoraram séculos para serem aceitos como números legítimos na matemática. Povos antigos, especialmente os chineses, já lidavam com quantidades negativas em contextos comerciais, como lucros e perdas, e registraram esses usos em *Os Nove Capítulos da Matemática* ou *Jiuzhang suanshu* (por volta de 200 a.C.). Já os gregos antigos rejeitavam essa ideia, pois sua matemática era essencialmente geométrica, baseada em comprimentos, áreas e volumes, que não admitem valores negativos.

Na Índia, no século VII, o matemático Brahmagupta deu um passo decisivo ao formular regras aritméticas para números negativos, interpretando-os como “dívidas”, em oposição às “fortunas” (quantidades positivas). Apesar disso, outros matemáticos importantes, como o persa Al-Khwarizmi, no século IX, ainda consideravam inadequado o uso de números negativos na álgebra, preferindo métodos geométricos.

Durante a Idade Média, a desconfiança persistiu na Europa. Matemáticos como Cardano e Descartes admitiam soluções negativas em equações, mas tratavam-nas como fictícias ou falsas. A aceitação plena começou a se consolidar no século XVII, especialmente com John Wallis, que estendeu a reta numérica para além do zero, atribuindo sentido geométrico aos números negativos. Somente no final do século XIX os números negativos passaram a ser plenamente aceitos na matemática, desvinculados da noção concreta de quantidades e reconhecidos como números em igualdade com os positivos.

Direto ao assunto

Os números inteiros são formados pelos números positivos (naturais), negativos e o zero.

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Observação: os números **inteiros positivos** podem ser representados com ou sem sinal de positivo à sua esquerda: +1 ou 1, +2 ou 2, +3 ou 3 e assim por diante.

Aplicações

1) Crédito e débito

Nos bancos, os números positivos são utilizados para representar *crédito* e os negativos, *dívida*. Se, após as movimentações de um determinado período, seu saldo estiver positivo, isso significa que você possui um crédito com o banco, um dinheiro que lhe pertence. Ao contrário, se seu saldo estiver negativo, isso significa que você possui uma dívida com o banco.

Exemplo: o extrato bancário abaixo apresenta as movimentações financeiras ocorridas em um determinado período. Observa-se que, apesar da existência de entradas (valores positivos) e saídas (valores negativos), o total das despesas superou o total das receitas. Assim, ao final do período, o saldo é **negativo**, indicando que o cliente **deve ao banco R$ 1.580,00**, **desconsiderando-se a cobrança de juros**.

Extrato bancário			
Data	**Descrição**	**Valor (R$)**	**Saldo (R$)**
02/01	Depósito	+ 1.500,00	1.500,00
03/01	Supermercado	– 320,00	1.180,00
04/01	Transferência recebida	+ 800,00	1.980,00
05/01	Pagamento de conta	– 210,00	1.770,00
06/01	Compra online	– 150,00	1.620,00
08/01	Salário	+ 2.300,00	3.920,00
10/01	Saque em dinheiro	– 500,00	3.420,00
12/01	Pagamento empréstimo	– 5.000	– 1580,00

2) Altitude

Para medir posições verticais na superfície terrestre, adota-se o nível do mar como referência. A partir dele, define-se a **altitude** de um local, que pode assumir valores positivos ou negativos.

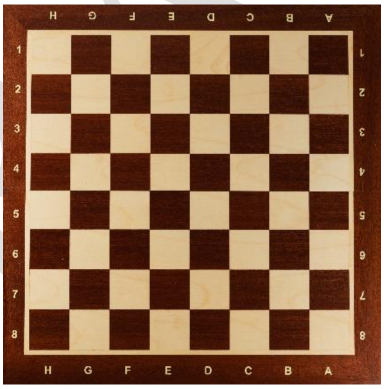
Pontos localizados acima do nível do mar possuem **altitude positiva**, enquanto pontos localizados abaixo do nível do mar possuem **altitude negativa**. Neste último caso, é comum também utilizar o termo **profundidade**, especialmente em contextos geográficos e oceanográficos.

Direto ao assunto

A ideia de utilizarmos duas referências para facilitar a localização de algo é natural à nossa razão e faz parte da experiência cotidiana.

Quando precisamos localizar uma loja em uma avenida muito extensa, por exemplo, é comum dizermos: “Fica na avenida X, no cruzamento com a avenida Y” ou “na esquina com a avenida Y”. Nesse caso, usamos duas direções distintas para determinar um ponto com precisão.

Essa mesma ideia aparece de forma mais técnica em diversos contextos. No tabuleiro de xadrez, por exemplo, temos 8 colunas, identificadas pelas letras de A a H, e 8 linhas, numeradas de 1 a 8. A posição de cada peça é determinada pelo cruzamento entre uma coluna e uma linha, como na casa A1, B1, C3, e assim por diante. Cada casa do tabuleiro corresponde, portanto, a um par de referências.



De modo análogo, as tabelas do programa Excel seguem essa mesma lógica: as colunas são indicadas por letras e as linhas por números, e cada célula é identificada pelo encontro entre ambos, como A1, B4 ou C10.

O mesmo princípio está presente nos sistemas de latitude e longitude, que utilizam referências horizontais e verticais — os paralelos e os meridianos — para localizar um ponto na superfície da Terra. O cruzamento entre esses dois valores determina, com precisão, a posição de um lugar.

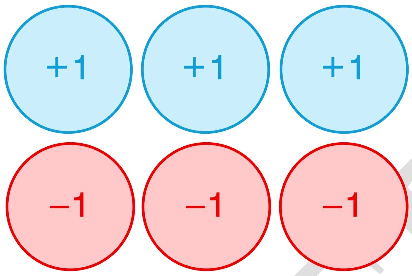
<u>Plano cartesiano</u>

É no contexto apresentado na seção “Um pouco de história” que surge o que hoje chamamos de **plano cartesiano**: um sistema formado por dois eixos perpendiculares orientados, associados a números, que permite representar pontos e curvas por meio de pares ordenados. O adjetivo “cartesiano” deriva do nome latinizado de Descartes — *Cartesius* — e constitui uma homenagem direta ao autor que sistematizou esse método.

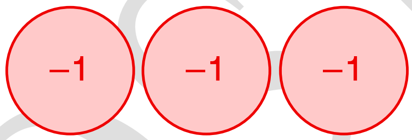
Vamos interpretar, com a ajuda das nossas fichas, o resultado de $-(+3)$.

A expressão $-(+3)$ é o mesmo que retirar $+3$ do zero.

Para representar o zero, utilizamos três fichas positivas e três negativas, pois elas se anulam entre si.



A partir desse zero, precisamos retirar $+3$, isto é, retirar três fichas positivas.



Após essa retirada, restam-nos três fichas negativas, ou seja, -3.

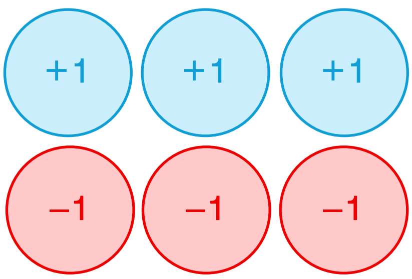
Logo:

$$-(+3) = -3$$

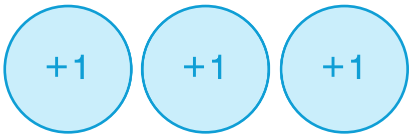
Isso confirma a ideia de que o oposto de $+3$ é igual a -3.

De modo análogo, vamos interpretar o resultado de $-(-3)$.

$-(-3)$ é o mesmo que retirar -3 do zero.



Para retirar -3, precisamos retirar três fichas negativas.



Restam-nos três fichas positivas, ou seja, $+3$.

Logo:

$$-(-3) = +3$$

<u>Exemplo:</u> determine o oposto de cada número abaixo.

a) –9

$$-(-9) = +9$$

b) +6

$$-(+6) = -6$$

c) –155

$$-(-155) = +155$$

d) +664

$$-(+664) = -664$$

<u>Subtração de números inteiros</u>

Para subtrair dois números inteiros, vamos utilizar o conceito de oposto de um número inteiro para transformar a subtração em uma **adição de números inteiros equivalente**. Observe:

$$(+4)\boxed{-(-3)} =$$

Na subtração $(+4) - (-3)$, a expressão $-(-3)$ é equivalente ao oposto de -3. Assim, podemos resolver essa subtração <u>conservando o minuendo e somando-o com o oposto do subtraendo</u>.

$$(+4) - (-3) = (+4) + (+3) =$$

Uma vez que já sabemos somar números inteiros, calculamos:

$$(+4) - (-3) = (+4) + (+3) = +7$$

Observe outro exemplo:

$$(+4) - (+7) = (+4) + (-7) = -3$$

Para subtrair dois números inteiros:

I) conservamos o minuendo;
II) somamos com o oposto do subtraendo, aplicando as regras de adição de números inteiros.

Exemplos:

a) $(+8) - (+9) = (+8) + (-9) = -1$

b) $(+8) - (-9) = (+8) + (+9) = +17$

c) $(-8) - (+9) = (-8) + (-9) = -17$

d) $(-8) - (-9) = (-8) + (+9) = +1$

e) $(-15) - (+15) = (-15) + (-15) = -30$

f) $(-20) - (-20) = (-20) + (+20) = 0$

Aquecimento

01. Calcule o resultado da divisão. Em seguida, marque a opção correspondente à soma dos algarismos do resultado.

$(-51{,}38) \div (-14) =$

a) 1 b) 5 c) 6 d) 4

Direto ao assunto

Nessa lição, vamos entender como calcular potenciação de números racionais nas formas fracionária e decimal.

1º caso) Potenciação de números racionais fracionários.

Para calcularmos potências de números racionais fracionários:

1) Aplicamos a regra de sinais para potências:

– base positiva, resultado positivo;
– base negativa e expoente par, resultado positivo;
– base negativa e expoente ímpar, resultado negativo.

2) Elevamos ambos, numerador e denominador, ao expoente externo e calculamos seus resultados.

Exemplos:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = +\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{2^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$

c) $\left(+\frac{1}{10}\right)^4 = +\frac{1^4}{10^4} = \frac{1}{10000}$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = +\frac{1^{10}}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$

2° caso) Potenciação de números racionais decimais.

Para calcularmos potências de números racionais decimais:

1) Aplicamos a regra de sinais para potências:

– base positiva, resultado positivo;
– base negativa e expoente par, resultado positivo;
– base negativa e expoente ímpar, resultado negativo.

2) Calculamos o resultado da potência de base decimal.

Exemplos:

a) $(-0{,}1)^2 = +0{,}01$

b) $(-0{,}1)^3 = -0{,}001$

c) $(-0{,}1)^4 = +0{,}0001$

d) $(-0{,}01)^2 = +0{,}0001$

e) $(-0{,}01)^3 = -0{,}000001$

f) $(-0{,}01)^4 = +0{,}00000001$

g) $(-0{,}003)^3 = -0{,}000000027$

h) $(-0{,}003)^4 = +0{,}000000000081$

i) $(-0{,}2)^5 = -0{,}00032$

j) $(-1{,}4)^2 = +1{,}96$

k) $(-1{,}9)^2 = +3{,}61$

l) $(-0{,}7)^3 = -0{,}343$

m) $(-0{,}5)^4 = +0{,}0625$

n) $(-0{,}03)^4 = +0{,}00000081$

o) $(-0{,}04)^5 = -0{,}0000001024$

p) $(+1{,}2)^3 = +1{,}728$

Módulo 03

Aula 17 – Raiz cúbica de números racionais

Aquecimento

01. Calcule:

a) $(-3)^3 =$ b) $\sqrt{0{,}64} =$ c) $\sqrt{\dfrac{2}{50}} =$

Direto ao assunto

Nessa lição, vamos aplicar o conceito de raiz cúbica aos números racionais fracionários e decimais.

Sabemos que extrair a raiz cúbica é o processo inverso de elevar ao cubo.

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{pois} \quad 4^3 = 64$$

Vamos, agora, estender esse conceito para números racionais.

No entanto, antes de avançarmos, é fortemente indicado memorizar as seguintes raízes:

$\sqrt[3]{0} = 0$ $\sqrt[3]{1} = 1$ $\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt[3]{216} = 6$ $\sqrt[3]{343} = 7$

$\sqrt[3]{512} = 8$ $\sqrt[3]{729} = 9$ $\sqrt[3]{1000} = 10$

1) Raiz cúbica de números racionais fracionários.

Extraímos, separadamente, a raiz cúbica do numerador e do denominador.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

b) $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} = -\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}} = -\frac{1}{5}$

c) $\sqrt[3]{\frac{343}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{7}{10}$

2) Raiz cúbica de números racionais decimais.

De modo prático, podemos proceder assim:

1. Extraímos a raiz cúbica do número **como se não houvesse vírgula**;
2. Posicionamos corretamente a vírgula, de modo que o resultado tenha **a terça parte de casas decimais do radicando**.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{-0{,}008} = -0{,}2$

b) $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$

c) $\sqrt[3]{-0{,}729} = -0{,}9$

d) $\sqrt[3]{1{,}331} = 1{,}1$

e) $\sqrt[3]{1{,}728} = 1{,}2$

f) $\sqrt[3]{0{,}003375} = 0{,}15$

Aquecimento

01. Calcule o resultado da divisão:

$20872 \div 8 =$

Um pouco de história

A álgebra não surgiu de forma abstrata ou teórica. Ela nasceu da necessidade de resolver problemas concretos, sobretudo problemas geométricos, ligados a medidas de terras, construções e repartições. É nesse contexto que aparecem, ainda na Antiguidade, os babilônios e egípcios, que já resolviam equações por meio de procedimentos aritméticos, mesmo sem uma simbologia formal.

No século III, em Alexandria, Diofanto de Alexandria escreve a obra *Aritmética*, na qual problemas são resolvidos por meio de equações. Embora ainda distante da álgebra simbólica moderna, Diofanto dá passos decisivos ao tratar incógnitas e operações de forma sistemática.

No século VIII, no mundo islâmico, ocorre um avanço decisivo com **Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi**, autor do *Al-Kitab al-Jabr wa'l-Muqabala*. Essa obra organiza métodos gerais para resolver equações lineares e quadráticas e dá nome à própria **álgebra ("al-jabr")**. Aqui, a álgebra se estabelece como um campo autônomo do conhecimento, ainda expresso em linguagem verbal.

Durante a Idade Média, esse saber chega à Europa principalmente por meio de traduções. No século XII, Geraldo de Cremona traduz para o latim cerca de 87 obras gregas e árabes, tornando acessíveis aos estudiosos europeus textos fundamentais da matemática antiga e islâmica, incluindo tratados algébricos.

No século XV, já no Renascimento, Michael Stifel, em sua obra *Arithmetica Integra*, contribui para o desenvolvimento da notação algébrica, incorporando números negativos e avançando na formalização simbólica.

Na expressão numérica, partimos de um ponto e chegamos a um resultado:

$$\underline{7 + 9 + 8 - 4} = 16 + 8 - 4 = 24 - 4 = \underline{20}$$

Partimos de $7 + 9 + 8 - 4$ para chegar em 20.

ou, passo a passo:

$$\begin{aligned}
&7 + 9 + 8 - 4 = \\
&16 + 8 - 4 = \\
&24 - 4 = \\
&20
\end{aligned}$$

Depois de encontrar o resultado, **podemos transformar a expressão em uma igualdade**:

$$7 + 9 + 8 - 4 = 20$$

Já na **igualdade**, temos **duas expressões**, uma de cada lado do sinal "=". As duas são analisadas e resolvidas **ao mesmo tempo**.

Exemplo:

$$7 + 8 + 5 = 24 - 4 \Rightarrow$$

$$15 + 5 = 20 \Rightarrow$$

$$20 = 20$$

Igualdades verdadeiras e falsas

Uma igualdade pode ser **verdadeira (V)** ou **falsa (F)**. Veja:

(F) $-5 - 10 = +15$
(V) $20 - 19 = -19 + 20$
(V) $1 - 5 - 4 = -10 + 2$

Outros símbolos matemáticos

Existem outros símbolos que permitem formar sentenças matemáticas:

$\neq$ — diferente de $>$ — maior que $<$ — menor que
$\Rightarrow$ — implica / então $\Leftrightarrow$ — equivalente a / se e somente se

Mas atenção: o único símbolo que expressa uma **igualdade** é o “=”.

Membros de uma igualdade

Em toda igualdade, temos dois membros:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 35 - 25$$

1º membro: $1 + 2 + 3 + 4$
2º membro: $35 - 25$

A igualdade como uma balança

A melhor comparação para uma igualdade é uma **balança de dois pratos** em equilíbrio.

Uma igualdade verdadeira **sempre está em equilíbrio**. Se um lado muda, o outro também precisa mudar para manter a igualdade.

Igualdade e a virtude da justiça

A igualdade está diretamente ligada à virtude da justiça. Na mitologia grega, Themis é a deusa que representa a justiça. Ela costuma ser retratada com três elementos importantes:

– a venda, que simboliza a **imparcialidade**;
– a balança, que representa o **equilíbrio**;
– a espada, que simboliza o **poder**.

Já na Bíblia, a justiça aparece não apenas como um conceito humano, mas como um princípio divino, ligado à ordem, ao equilíbrio e à verdade relacionada à Sua Vontade. Essa ideia é expressa de modo especial no livro do profeta Malaquias, quando lemos:

Malaquias 3, 20: "Mas sobre vós que temeis o meu nome se levantará o sol de justiça que traz a salvação em seus raios…"

Propriedades da igualdade

1) Propriedade reflexiva

$$a = a$$

Interpretação: todo número (ou expressão) é igual a si mesmo.

Exemplos:

a) $6 = 6$
b) $2 + 9 = 2 + 9$
c) $x = x$
d) $0 = 0$

2) Propriedade simétrica

$$a = b \iff b = a$$

Interpretação: se uma expressão é igual a outra, então a outra é igual à primeira.

Exemplos:

a) $3 + 4 = 7 \Rightarrow 7 = 3 + 4$
b) $5 + 4 = 10 - 1 \Rightarrow 10 - 1 = 5 + 4$
c) $x = y \Rightarrow y = x$

3) Propriedade transitiva

Se:

$$a = b \quad e \quad b = c \quad \Rightarrow \quad a = c$$

e) $4x - 3 = 6x + 9$

Neste exemplo, **três formas distintas de resolução** serão apresentadas. Cabe ao aluno escolher aquela que considerar mais adequada, lembrando que **todas são válidas**, desde que fundamentadas nos princípios estudados.

1) Isolando os termos com incógnita no primeiro membro e, ao final, **multiplicando ambos os membros por** -1, de modo a obter coeficiente positivo para a incógnita.

$$4x - 3 = 6x + 9$$

$$4x \cancel{-3} \cancel{+3} - 6x = \cancel{6x} + 9 + 3 \cancel{-6x}$$

$$4x - 6x = 9 + 3$$

$$-2x = 12$$

$$-2x \cdot (-1) = 12 \cdot (-1)$$

$$\cancel{2}x = -12$$

$$\frac{\cancel{2}x}{2} = -\frac{12}{2}$$

$$x = -6$$

2) Isolando os termos com incógnita no primeiro membro e **dividindo diretamente por número negativo** para isolar a incógnita.

$$4x - 3 = 6x + 9$$

$$4x \cancel{-3} \cancel{+3} - 6x = \cancel{6x} + 9 + 3 \cancel{-6x}$$

$$4x - 6x = 9 + 3$$

$$-2x = 12$$

$$\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} = \frac{12}{-2}$$

$$x = \frac{12}{-2}$$

$$x = -6$$

3) Isolando os termos com incógnita no segundo membro e aplicando a **propriedade transitiva da igualdade**.

$$4x - 3 = 6x + 9$$

$$\cancel{4x} - 3 \cancel{-4x} - 9 = 6x \cancel{+9} - 4x \cancel{-9}$$

$$-3 - 9 = 6x - 4x$$

$$-12 = 2x$$

$$\frac{-12}{2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$$

$$-6 = x$$

$$x = -6$$

$$S = \{-6\}$$